2023-7-9

第二章 流形与张量

Chang Fuming

E-mail: chang_fu_ming_123@tju.edu.cn

ABSTRACT: 摘要

目录

1 流形 **1**

1.1 拓扑空间 1

1.1.1 拓扑空间 1

1.1.2 Hausdorff 空间 1

1.1.3 同胚 2

1.2 微分流形 2

1.2.1 微分同胚 4

2 切空间 **5**

2.1 切向量 5

2.1.1 切空间 6

2.1.2 光滑曲线 7

2.2 矢量场 (切矢量场) 8

2.2.1 李括号 9

2.2.2 积分曲线——更直观的定义矢量场 9

3 张量 **10**

3.1 对偶空间 10

3.2 对偶矢量 10

3.2.1 余切空间 (Cotangent Space) 11

3.2.2 对偶矢量场 11

3.2.3 坐标基 11

3.3 广义张量 12

3.3.1 张量场 12

3.4 度规 14

3.4.1 度规 14

3.4.2 局域洛伦兹参考系（局域惯性系） 15

3.4.3 升降指标 16

3.5 Levi-civita 张量 17

4 李导数 **19**

4.1 拉回与朝前映射 19

4.1.1 拉回流形 N 上的函数 f 20

4.1.2 朝前流形 M 上的矢量 X 20

4.1.3 拉回流形 N 上的对偶矢量 ω 21

4.1.4 流形 M 与流形 N 微分同胚 21

4.2 李导数 23

4.2.1 函数 24

4.2.2 矢量 25

4.2.3 对偶矢量 26

4.2.4 张量 27

5 微分形式 27
5.1 p-形式 28
5.2 楔积 (Wedge Product) 28
5.3 外导数 31
5.4 霍奇对偶 (Hodge Duality) 34
5.5 霍奇-拉普拉斯算子 35

6 积分 38
6.1 子流形 38
6.1.1 子流形 38
6.1.2 超曲面 39
6.1.3 带边界的流形 40
6.2 斯托克斯定理 40
6.2.1 体形式 40
6.2.2 斯托克斯定理 41

---

1 流形

1.1 拓扑空间

首先我们将引入拓扑的概念：

定义 1 (拓扑) *对于点集 M, 拓扑 $\mathcal{T}$ 就是满足以下条件的子集 $O_i \subset M$,*

1. *如果 $O_1 \in \mathcal{T}, O_2 \in \mathcal{T}$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$*
2. *如果 $O_r \in \mathcal{T}$, 则 $\cup_r O_r \in \mathcal{T}$*
3. *$M \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$*

拓扑就是在定义开集。

1.1.1 拓扑空间

在集合 M 上定义的拓扑 $\mathcal{T}$ 连同集合称为拓扑空间, 记为 $(M, \mathcal{T})$

1.1.2 Hausdorff 空间

$Hausdorff$ 空间是指定义的拓扑空间中任意两点都可以区分，其定义为

定义 2 (Hausdorff 空间) *$\forall p, q \in M$, 当 $p \neq q$ 时，存在开集 $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, 使得 $p \in O_1, q \in O_2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$*

比如说，在 $\mathbb{R}^1$ 集合中，定义开集为 $O_{ab} = (a, b)$, 拓扑 $\mathcal{T}$ 为 $\{O_{ab}\}$, 任意的点 p, q 间总可以找到一个数 $p < r < q$, 此时选取 O_{pr}, O_{rq} 且 $O_{pr} \cap O_{rq} = \emptyset$; 同理欧几里得空间 $\mathbb{E}^n$ 也是 $Hausdorff$ 空间。

1.1.3 同胚

我们有两个拓扑空间 $(M,\mathcal{T})$ 和 $(M',\mathcal{T}')$ 存在一个映射 $f: M \to M'$,

定义 3 (同胚) 若两个拓扑空间同胚，则映射需要满足：

1. 一一对应：映射 f 即是单射 (如果 $p \neq q \in M, f(q) \neq f(p)$) 又是满射 ($f(M) = M', M'$ 中的每一个象都有原象)

2. 双向连续：f 是连续的，且对于 $\forall O' \in \mathcal{T}'$，都有 $f^{-1}(O') \in \mathcal{T} \overset{\epsilon-\delta}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, \exists \delta$, 使得当 $|x - x'| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ 成立，对于 f^{-1} 也成立。

注意此时的双向连续不能由一一对应推出，更确切的说，f^{-1} 的连续性由 f 的连续性得不到。

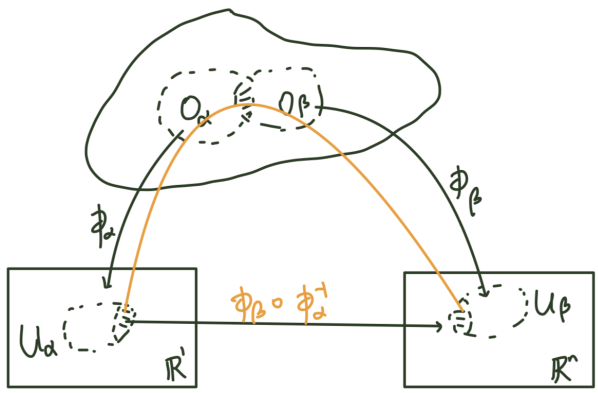
1.2 微分流形

定义 4 (微分流形) 一个 n 维的无穷连续的微分流形 M 是一个 $Hausdorff$ 空间，且满足：

1. M 局域同胚于 $\mathbb{R}^n$

2. 如果 $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$，且 $U_\alpha, U_\beta \in R^n$，存在两个映射 $\phi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha, \phi_\beta : O_\beta \to U_\beta$ 是相容的。相容指的是对于映射 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta) \to \phi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta)$ 是无穷连续的。

可以看出，根据 M 与 $\mathbb{R}^n$ 局域同胚,ϕ(满足同胚定义中 1) 建立了流形 M 与实数对 $\mathbb{R}^n$ 的联系，所以称 ϕ 为 chart，即当 $p \in M, \phi(p) = \left(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)\right)$，一般记为 $x^\mu = x^\mu(p)$。我们将每一块流形上的区域通过映射集 $\{\phi_\alpha\}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 联系起来，类似于地球与地图集联系起来，我们称 $\{\phi_\alpha\}$ 为地图册。映射 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 称为连接函数，映射表示如图：

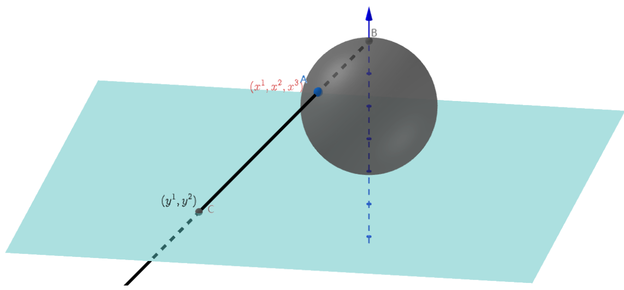


我们可以引入相容的映射 ϕ 从而构造不同的地图册，但是他们的微分结构是相同的，相同微分结构的流形看作是相同的流形。所以微分流形就是可以在上面做微分的流形。

例 5 (球极投影) 考虑流形 S^2, 将其镶嵌到 3 维欧几里得空间中即

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2=1 \tag{1.1}$$

第一步我们去找可以映射的 *chart*



所以 *chart1*:$\phi_1: S^2\backslash n \rightarrow \mathbb{R}^2$, 所以 $\left(y^1,y^2\right)=\phi_1\left(x^1,x^2,x^3\right)$, 其中 $n=(0,0,2)$ 代表北极点,$x^3\neq 1$，所以

$$\overrightarrow{BA}=\left(x^1,x^2,x^3-1\right),\overrightarrow{BC}=\left(y^1,y^2,-2\right) \tag{1.2}$$

即

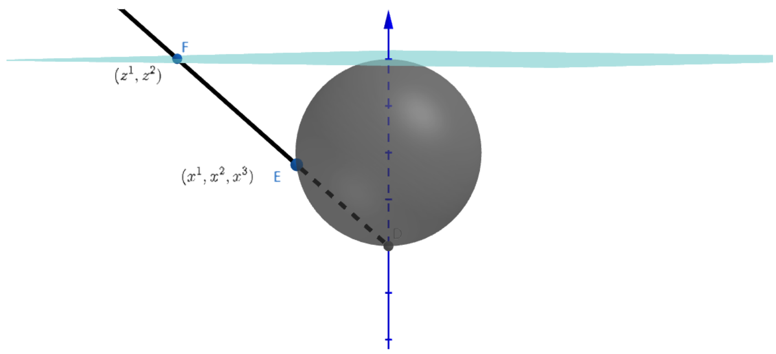
$$y^1=kx^1;y^2=kx^2 \tag{1.3}$$

$$-2=k\left(x^3-1\right)\Longrightarrow k=\frac{-2}{x^3-1} \tag{1.4}$$

所以

$$\begin{aligned} y^1&=\frac{2x^1}{1-x^3};\\ y^2&=\frac{2x^2}{1-x^3} \end{aligned} \tag{1.5}$$

但是这个映射不包含北极点，考虑



所以找到第二个 *chart2*:$\phi_2: S^2\backslash s \rightarrow \mathbb{R}^2$, 即 $\left(z^1,z^2\right)=\phi_2\left(x^1,x^2,x^3\right)$, 其中 $s=(0,0,0)$ 代表南极点,$x^3\neq -1$, 所以

$$\overrightarrow{DE}=\left(x^1,x^2,x^3+1\right),\overrightarrow{DF}=\left(z^1,z^2,2\right) \tag{1.6}$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
z^1 &= \frac{2x^1}{1+x^3} \\
z^2 &= \frac{2x^2}{1+x^3}
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

第二步看连接函数的连续性 $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (y^1, y^2) \to (z^1, z^2)$, 由式 *(1.5)(1.7)* 可知

$$
y^1 z^1 + y^2 z^2 = 4(\text{垂直}) \tag{1.8}
$$

$$
y^1 z^2 = y^2 z^1 \tag{1.9}
$$

联立可得

$$
z^1 = \frac{4y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \tag{1.10}
$$

$$
z^2 = \frac{4y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \tag{1.11}
$$

可以看出 $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ 在不包含南极北极点点的区域中是光滑的。所以 S^2 是一个微分流形。

例 6 (图形) 下图的例子就不是光滑流形：

如何去寻找一个覆盖，或者是地图集？首先要求单个 chart 覆盖时不能出现多值性，且全部的 chart 可以覆盖整个流形。

1.2.1 微分同胚

类似于同胚的定义，我们想定义微分同胚。我们一般说函数的定义是 $f : M \to \mathbb{R}$, 是从流形上的点到实数域上的映射，但是流形上的点[1]做自变量对于定义微分是不方便的，所以根据之前的映射图，我们实际上有一个映射 $\phi : M \to \mathbb{R}^n$, 而流形上的函数就是指 $f \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$。所以我们可以说，当映射 $f \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ 对于所有的坐标卡 ϕ 都是光滑的，那么我们就认为 $f : M \to \mathbb{R}$ 是光滑的[2]。而所有连续的光滑的 f 构成的集合称为 $\mathcal{F}(M)$。

同样的，对于映射 $\sigma : M \to N$ 是光滑映射 $\iff$ 对于所有的映射 $\phi : M \to U \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$,$\psi : N \to V \subset \mathbb{R}^{\dim(N)}$, 都有 $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \to V$ 是光滑的

定义 7 (微分同胚) 两个流形微分同胚要求同胚映射 $\sigma : M \to N$ 光滑。

由微分同胚的定义我们可以看出,两个微分同胚的的流形具有相同的维度[3],即 $\dim M = \dim N$.

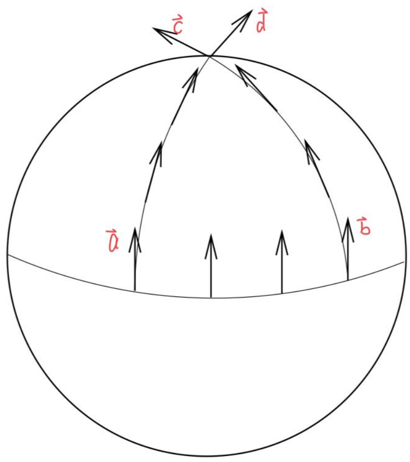
[1]流形上的点是没有具体的运算含义的，你说用 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ 来表示流形上的点，那就已经说明你在用映射 $\phi : M \to \mathbb{R}^n$

[2]为什么要求所有坐标卡？

[3]类似于线性变换，$Y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $X = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$, 线性变换为 $Y = AX$，此时矩阵 A 为 $n \times m$ 矩阵，若要使逆变换存在，则必要条件是 A 为方阵，即 $\dim X = \dim Y$

2 切空间

在平直空间中，矢量平移是一件很自然的事情，但是在弯曲空间中，矢量的平移可能会产生不自洽：矢量 **a** 平移到矢量 **d**, 矢量 **a** 平移到 **b** 再平移到 **c**，显然矢量 **c** 与 **d** 是不同的矢量.



2.1 切向量

定义 8 (切向量) *对于 $p \in M$, 切向量定义为一种映射[4](操作)$X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$, 当 $f, g \in \mathcal{F}(M)$, 映射 X_p 满足下面两个条件:*

1. $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g), a, b \in R$
2. 满足莱布尼兹率：$X_p(fg) = f(p) X_p(g) + X_p(f) g(p)$

可以证明, 对于 $X_p(a) = 0, a \in R$

Proof. $X_p(fg) = f(p) X_p(g) + X_p(f) g(p)$, 当 f 为常值函数，即 $f(p) = a \in R$, 可得

$$\begin{aligned} X_p(fg) &= aX_p(g) + X_p(a) g(p) \\ &= X_p(ag) = aX_p(g) \end{aligned} \tag{2.1}$$

即对于流形上的任意一点 $p \in M$,

$$X_p(a) g(p) = 0 \iff X_p(a) = 0 \tag{2.2}$$

■

我们想要知道这个切向量的具体是如何作用于函数上的，考虑一个映射：$f : M \to \mathbb{R}$, 坐标卡为 $\phi = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, 则 $f \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$, 我们将定义

$$\partial_\mu f|_p \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p \tag{2.3}$$

[4]流形上点 p 的光滑函数变成数

但是我们知道 f 的自变量不是 x^μ, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p \overset{def}{=} \frac{\partial\left(f\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x^\mu}|_p \tag{2.4}$$

由此我们定义了流形上的光滑函数的切向量：$\partial_\mu|_p = \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p$.

2.1.1 切空间

我们认为 p 点所有切矢量的集合记为 p 点的切空间 $T_p(M)$。也就是说，我们定义的切空间是依赖于流形上的点 p 的。切空间，哪一点的切空间。

Claim 9 $\{\partial_\mu|_p\}_{\mu=1,2,\ldots,n}$ *形成了 p 点切空间 $T_p(M)$ 的一组基. 此时按此基底展开 $X_p = X^\mu\partial_\mu|_p$.*

接下来我们想看看不同的坐标基之间有什么关系：

我们找到另外一个坐标卡 $\widetilde{\phi} = \widetilde{x}^\mu$, 两者的关系？

$$X_p = X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p = \widetilde{X}^\mu\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\mu}|_p \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} X_pf &= X^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p = \widetilde{X}^\mu\frac{\partial f}{\partial\widetilde{x}^\mu}|_p \\ &= X^\mu\frac{\partial\widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}|_p\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\widetilde{x}^\nu}|_p \end{aligned} \tag{2.6}$$

但是 $\widetilde{f}(\widetilde{x}^\mu)$ 是什么？

$$\begin{aligned} X_pf = X^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p &= X^\mu\frac{\partial\left(f\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)} && (2.7)\\ &= X^\mu\frac{\partial\left(f\circ\widetilde{\phi}^{-1}\circ\widetilde{\phi}\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)} && (2.8)\\ &= X^\mu\frac{\partial\left(\widetilde{f}\circ\widetilde{\phi}\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)} && (2.9)\\ &= X^\mu\frac{\partial\widetilde{f}(\widetilde{x}(x))}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)} && (2.10)\\ &= X^\mu\frac{\partial\widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)}\frac{\partial\widetilde{f}(\widetilde{x}(x))}{\partial\widetilde{x}^\nu}|_{\widetilde{\phi}(p)} = \widetilde{X}^\mu\frac{\partial\left(f\circ\widetilde{\phi}^{-1}\right)}{\partial\widetilde{x}^\mu}|_{\widetilde{\phi}(p)} = \widetilde{X}^\mu\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\widetilde{x}^\mu}|_{\widetilde{\phi}(p)} && (2.11) \end{aligned}$$

所以[5], 矢量的变换率:

$$\widetilde{X}^\mu = X^\mu\frac{\partial\widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}|_{\phi(p)} \tag{2.12}$$

[5]迷惑不解??? 大费周章???

选取特殊的矢量 $X^\mu = \delta^\mu_\alpha$, 由式 (2.6) 可知

$$\delta^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\alpha \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}|_{\not\phi(p)} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^\nu}|_p \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha}|_{\not\phi(p)} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^\nu}|_p \tag{2.14}$$

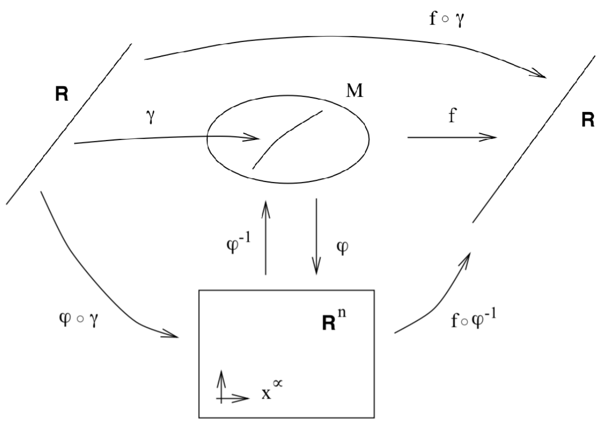
可得

$$\partial_\alpha = \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \widetilde{\partial}_\nu \tag{2.15}$$

2.1.2 光滑曲线

此节，我们将不同于之前对切矢的定义来看切矢的意义。

如图所示



将曲线进行参数化：引入一个参数 λ, 定义一个映射 $\gamma : \mathbb{R} \to M$,$\gamma(\lambda = 0) = p \in M$, 引入坐标卡 $\not\phi$，可得 $x^\mu(\lambda) = \phi \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, 那么此时对于这条参数化的曲线 (一维一个参数)，我们可以计算切矢 (直观意义下的)$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0}$，构造一个随 λ 变化的量，

$$X_p = \frac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.16}$$

作用于光滑函数

$$X_p(f) = \frac{df}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda}|_{\lambda=0} \tag{2.17}$$

$$= \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} \partial_\mu f \tag{2.18}$$

由式 (2.7) 可知

$$X_p f = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} \partial_\mu f \tag{2.19}$$

其中 $\partial_\mu|_p$ 为基底, 在点 p

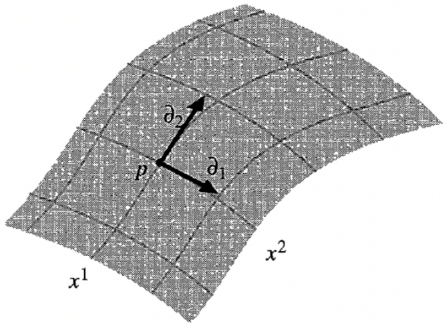
$$X^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \tag{2.20}$$

举例来说，

例 10 当 $x^\mu = (0, \lambda, 0, 0)$ 时，

$$X_p^{(1)} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_1|_p$$

如图所示



需要注意的是，在点 p 的切空间 $T_p(M)$ 是不同于点 q 的切空间[6]$T_q(M)$。

以上就是流形中的切矢。对于切空间的直观印象，我们可以将流行嵌入到更高维的空间中，等价的考虑一个切空间。

2.2 矢量场 (切矢量场)

我们已经讨论了在某一点处的矢量，但是我们更关心的是所有点处的矢量场。我们发现切向量是映射 $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$，涉及到所有的点 p 时，一个矢量场 X 可以定义为：对流形 M 上的每一个点 p 的切矢量 X_p 的光滑赋值。

$$X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) \tag{2.21}$$

也即

$$(X(f))(p) = X_p(f) \tag{2.22}$$

其中 $f \in \mathcal{F}(M)$，当 p 点连续变动时，对应的 $X(f)$ 构建了从 $p \to X_p(f)$ 的映射，也属于流形 M 上的光滑函数集 $\mathcal{F}(M)$。由式 (2.16), 可知

$$X = \frac{d}{d\lambda} \tag{2.23}$$

由式 (2.7)，在坐标基 $\{x^\mu\}$ 下的表示为

$$X(f) = X^\mu \partial_\mu f \tag{2.24}$$

不涉及具体的点。同时我们将**流形 M 上的所有矢量场的集合称为** $\chi(M)$。

[6]我们不能将 $T_p(M)$ 里的切矢量添加到 $T_q(M)$ 中去，两者不能直接比较。

2.2.1 李括号

两个矢量场 X, Y，我们定义李括号为

$$\begin{aligned}[X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= X(Y^\mu \partial_\mu f) - Y(X^\mu \partial_\mu f) \\ &= X^\nu \partial_\nu (Y^\mu \partial_\mu f) - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu \partial_\mu f) \\ &= (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu) \partial_\mu f \end{aligned} \tag{2.25}$$

所以李括号相当于由 X, Y 生成的一个新的矢量场

$$[X, Y]^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu \tag{2.26}$$

可以证明：关于李括号的雅可比恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$。

Proof. 我们来证明这件事，

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]]^\mu &= X^\nu \partial_\nu [Y, Z]^\mu - [Y, Z]^\nu \partial_\nu X^\mu \\ &= X^\nu \partial_\nu (Y^\sigma \partial_\sigma Z^\mu - Z^\sigma \partial_\sigma Y^\mu) - (Y^\sigma \partial_\sigma Z^\nu - Z^\sigma \partial_\sigma Y^\nu) \partial_\nu X^\mu \\ &= X^\nu \partial_\nu Y^\sigma \partial_\sigma Z^\mu - X^\nu \partial_\nu Z^\sigma \partial_\sigma Y^\mu + Z^\sigma \partial_\sigma Y^\nu \partial_\nu X^\mu - Y^\sigma \partial_\sigma Z^\nu \partial_\nu X^\mu \\ &+ X^\nu Y^\sigma \partial_\nu \partial_\sigma Z^\mu - X^\nu Z^\sigma \partial_\nu \partial_\sigma Y^\mu \end{aligned}$$

可以发现与 $[Y, [Z, X]]$，$[Z, [X, Y]]$ 相消。■

2.2.2 积分曲线——更直观的定义矢量场

我们考虑一族单参数微分同胚[7]$\sigma_\lambda : M \to M$，且满足[8]$\sigma_\lambda \circ \sigma_\eta = \sigma_{\lambda+\eta}$，其中 λ 代表不同的微分同胚的映射。当我们固定流形上的点 $p \in M$，不断的改变映射 λ，将同一点 p 映射到流形上的不同的点，$\sigma_\lambda(p) : \mathbb{R} \to M$，我们称 $\sigma_\lambda(p)$ 形成的关于 p 的轨道。此时改变 p 点位置，不同点的轨道将覆盖整个流形 M。我们将轨道上 (λ 为参数) 的每一个点都分配一个切矢量，

$$X^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\sigma_\lambda)}{d\lambda} \equiv \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \tag{2.27}$$

反过来，我们有一个矢量场 X，每一点都有一个切矢量，

$$X^\mu(\lambda) = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \tag{2.28}$$

由 p 点提供初始条件 $x^\mu(0) = x^\mu(p)$，可以求出光滑曲线 $x^\mu(\lambda)$。

总结 11.

单参数微分同胚族 $\Longleftrightarrow$ 轨道/积分曲线 $\Longleftrightarrow$ 矢量场

[7] $\sigma_{\lambda=0}$ 代表恒等映射

[8] 这个性质有什么意义吗？

例 12 我们考虑一个 S^2 的流形，选取坐标为 (θ, ϕ)，有一个矢量场 $X = \partial_\phi = X^\mu \partial_\mu$，由式 *(2.28)* 建立光滑曲线

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\theta}{d\lambda} \\
1 &= \frac{d\phi}{d\lambda}
\end{aligned}
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 \\
\phi &= \phi_0 + \lambda
\end{aligned}
$$

其中 $x^1(p) = \theta_0, x^2 = \phi_0$，单参的微分同胚映射为 $\sigma_\lambda : (\theta_0, \phi_0) \to (\theta_0, \phi_0 + \lambda)$，如图所示，

3 张量

3.1 对偶空间

我们定义了矢量空间 V，而对偶空间定义为 V^*，对于对偶空间的矢量是所有线性映射的集合，$\omega : V \to \mathbb{R}$，我们有如下的运算规律，对于 $v, w \in V; \omega, \eta \in V^*$，且 $a, b \in R$, 我们有

1. $\omega(av + bw) = a\omega(v) + b\eta(v)$
2. $(a\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V)$

我们给定矢量空间 V 的一个基 $\{e_\mu, \mu = 1, \ldots, n\}$, 由此我们可以引入一个对偶空间 V^* 的基底 $\{\theta^\mu, \mu = 1, \ldots, n\}$，满足[9]

$$\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{3.1}$$

同理我们可以得到，当 $\omega \in V^*, X \in V$ 时

$$
\begin{aligned}
\omega(X) &= \omega_\mu \theta^\mu (X^\nu e_\nu) \\
&= \omega_\mu X^\nu \theta^\mu (e_\nu) \\
&= \omega_\mu X^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu X^\mu
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

如果我们要求 $X(\omega) = \omega(X)$，那么[10]$X \in V : V^* \to \mathbb{R}$ 且 $V^{**} = V$。

3.2 对偶矢量

矢量我们是根据切矢量来定义的，那么对偶矢量也即是切矢量的对偶矢量。我们将定义切空间的对偶空间：余切空间，得到对偶矢量场。

[9]这就意味着 $\dim V = \dim V^*$; 其中 θ^μ, e_μ 并不是分量，μ 表示区分不同的基底。

[10]循环论证还是自洽？

3.2.1 余切空间 (Cotangent Space)

类比于矢量空间与对偶矢量空间，我们将相同的定义赋与切空间：对于流形 M 上的切空间 $T_p(M)$，它的余切空间为 $T_p^*(M)$，如果 $\omega_p \in T_p^*(M)$，那么 $\omega_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$。一个直观的例子是函数 f 的梯度。我们将一个函数 f 的梯度记为 df，那么它作用于矢量 $d/d\lambda$ 就相当于是函数的方向导数：

$$df\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda} \tag{3.3}$$

。我们为什么不将 f 看作一个对偶矢量，而是将梯度看作对偶矢量？毕竟 $df/d\lambda$ 可以看作 $X(\omega)$。*CHECK*。余切空间的基矢一定是余切矢量，我们引入基底 $\{\theta_p^\mu, \mu = 1, \ldots, n\}$, 对于余切矢量

$$\omega_p = \omega_\mu(p)\,\theta_p^\mu \tag{3.4}$$

同理，对于 $(T_p(M))^{**} = T_p(M)$，我们有[11]$X_p \in T_p(M) : T_p^*(M) \to \mathbb{R}$，

$$X_p(\omega_p) = \omega_p(X_p) \tag{3.5}$$

3.2.2 对偶矢量场

我们定义了点 p 的余切空间，与矢量场的定义类似，我们考虑流形上的所有点的余切空间来定义对偶矢量场。对偶矢量 ω_p 的作用对象是切矢量，对偶矢量场 $\Sigma(M)$ 考虑的是每一点的余切矢量，对于[12]$\omega \in \Sigma(M), \omega : \chi(M) \to \mathcal{F}(M)$，自变量是切矢量空间 (矢量空间)，所以当 $X \in \chi(M)$

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) \tag{3.6}$$

当 $V, W \in \chi(M); \omega, \eta \in \Sigma(M); f, g \in \mathcal{F}(M)$，我们有

1. $\omega(fV + gW) = f\omega(V) + g\omega(W)$
2. $(f\omega + g\eta)(V) = f\omega(V) + g\eta(V)$

与切矢量类似，$X(\omega)(p) = X_p(\omega_p) = \omega_p(X_p) = \omega(X)(p)$，所以矢量可以定义为 $X : \Sigma(M) \to \mathcal{F}(M)$。

3.2.3 坐标基

我们接下来考虑一个坐标基矢 $\{e_\mu = \partial_\mu, \mu = 1, \ldots, n\}$，那么它的对偶基矢是什么？由式 (3.3) 可知

$$df(X) = \frac{df}{d\lambda} = X(f) = X^\mu \partial_\mu f \tag{3.7}$$

选择 $f = x^\mu, X = d/d\lambda = (dx^\nu/d\lambda)\,\partial_\nu = \partial_\nu$($\nu$ 为固定值，选择 $x^\nu = \lambda$)，可得

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(x^\mu) = \delta_\nu^\mu \tag{3.8}$$

[11] 前面我们有 $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$，两者什么关系？

[12] ω：co-vector/one-form/cotangent vector/dual vector

所以对基矢为 $\{dx^\mu, \mu = 1, \ldots, n\}$，维度相同。且基矢的坐标变换为

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \widetilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{3.9}$$

$$d\widetilde{x}^\mu = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{3.10}$$

所以

$$\begin{aligned} d\widetilde{x}^\nu\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^\mu}\right) &= \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} dx^\rho \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \widetilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) \\ &= \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \widetilde{x}^\mu} dx^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) \\ &= \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \widetilde{x}^\mu}\delta^\rho_\sigma \\ &= \delta^\nu_\mu \end{aligned} \tag{3.11}$$

对于一般的对偶矢量的变换

$$\begin{aligned} \omega = \omega_\mu dx^\mu &= \widetilde{\omega}_\mu d\widetilde{x}^\mu \\ &= \widetilde{\omega}_\nu \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \end{aligned} \tag{3.12}$$

即

$$\omega_\mu = \widetilde{\omega}_\nu \frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tag{3.13}$$

$$\widetilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \widetilde{x}^\mu}\omega_\nu \tag{3.14}$$

上式称为对偶矢量的变换规则。

3.3 广义张量

在流形 M 上的 (k,l) 阶张量是被定义为一个多重映射 (multi-linear map):

$$S_p : \underbrace{T_p^*(M) \times \cdots \times T_p^*(M)}_{k} \times \underbrace{T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)}_{l} \to \mathbb{R} \tag{3.15}$$

所以根据这个定义，函数/标量可以看作 $(0,0)$ 阶张量，矢量可以看作 $(1,0)$ 阶张量，对偶矢量可以看作 $(0,1)$ 阶张量[13]。

3.3.1 张量场

类比之前矢量场与对偶矢量场的定义，(k,l) 阶的张量平滑的分配到流形 M 上的每一个点 p，

$$S : \underbrace{\Sigma(M) \times \cdots \times \Sigma(M)}_{k} \times \underbrace{\chi(M) \times \cdots \times \chi(M)}_{l} \to \mathcal{F}(M) \tag{3.16}$$

[13] 任意的 $(1,0)$ 阶张量都与 $(0,1)$ 阶张量对偶吗？

对于张量的多重线性是指：当 $f,g,h,k \in \mathcal{F}(M); V,W \in \chi(M); \omega,\eta \in \Sigma(M)$ 时，$S(\omega,V) \in \mathcal{F}(M)$ 满足

$$\begin{aligned} S(f\omega+g\eta,hV+kW) &= fS(\omega,hV+kW)+gS(\eta,hV+kW) \\ &= fhS(\omega,V)+fkS(\omega,W)+ghS(\eta,V)+gkS(\eta,W) \end{aligned} \tag{3.17}$$

对于一个 (k,l) 阶的张量 S，其分量定义为

$$S^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} = S\left(\theta^{\mu_1},\dots,\theta^{\mu_k},e_{\nu_1},\dots,e_{\nu_l}\right) \tag{3.18}$$

所以张量 S 可以表示为

$$S = S^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\mu_k}\otimes\theta^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{\nu_l} \tag{3.19}$$

当空间的维度为 $n = \dim T_p = \dim T_p^*$ 时，(k,l) 阶张量的分量个数为 $\underbrace{n\times\cdots\times n}_{k} \times \underbrace{n\times\cdots\times n}_{l} = n^{k+l}$。

举个例子：$T(\omega,\eta,X) = T\left(\omega_\mu\theta^\mu,\eta_\nu\theta^\nu,X^\rho e_\rho\right) = \omega_\mu\eta_\nu X^\rho T\left(\theta^\mu,\theta^\nu,e_\rho\right) = \omega_\mu\eta_\nu X^\rho T^{\mu\nu}{}_\rho$。

接下来我们将考虑张量的变换律，

$$\widetilde{\theta}^\mu = A^\mu_\nu\theta^\nu; \widetilde{e}_\mu = \overline{A}^\nu_\mu e_\nu \tag{3.20}$$

且 $\widetilde{\theta}^\mu\left(\widetilde{e}_\nu\right) = \delta^\mu_\nu \Longrightarrow A^\mu_\tau\overline{A}^\tau_\nu = \delta^\mu_\nu$，即 $\overline{A}^\tau_\nu = \left(A^{-1}\right)^\tau_\nu$，由此可以得到，

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} &= S\left(\widetilde{\theta}^{\alpha_1},\dots,\widetilde{\theta}^{\alpha_k},\widetilde{e}_{\beta_1},\dots,\widetilde{e}_{\beta_l}\right) \\ &= S\left(A^{\alpha_1}_{\mu_1}\theta^{\mu_1},\dots,A^{\alpha_k}_{\mu_k}\theta^{\mu_k},\overline{A}^{\nu_1}_{\beta_1}e_{\nu_1},\dots,\overline{A}^{\nu_l}_{\beta_l}e_{\nu_l}\right) \\ &= A^{\alpha_1}_{\mu_1}\dots A^{\alpha_k}_{\mu_k}\overline{A}^{\nu_1}_{\beta_1}\dots\overline{A}^{\nu_l}_{\beta_l}S\left(\theta^{\mu_1},\dots,\theta^{\mu_k},e_{\nu_1},\dots,e_{\nu_l}\right) \\ &= A^{\alpha_1}_{\mu_1}\dots A^{\alpha_k}_{\mu_k}\overline{A}^{\nu_1}_{\beta_1}\dots\overline{A}^{\nu_l}_{\beta_l}S^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} \end{aligned} \tag{3.21}$$

上式 (3.21) 被称为张量变化律，我们在一个坐标基下去考虑

$$d\widetilde{x}^\mu = \frac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu; \widetilde{\partial}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial\widetilde{x}^\mu}\partial_\nu \tag{3.22}$$

可以得到

$$\widetilde{S}^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} = \frac{\partial\widetilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial\widetilde{x}^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\widetilde{x}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial\widetilde{x}^{\beta_l}}S^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} \tag{3.23}$$

同时对于张量积：我们有一个 (p,q) 阶的张量 S，(r,s) 阶的张量 T，定义

$$\begin{aligned} &S\otimes T\left(\omega_1,\dots,\omega_p,X_1,\dots,X_q,\eta_1,\dots,\eta_r,Y_1,\dots,Y_s\right) \\ &= S\left(\omega_1,\dots,\omega_p,X_1,\dots,X_q\right)T\left(\eta_1,\dots,\eta_r,Y_1,\dots,Y_s\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

对于其分量

$$\begin{aligned} &S\otimes T\left(\theta_{\mu_1},\dots,\theta_{\mu_p},e_{\rho_1},\dots,e_{\rho_q},\theta^{\nu_1},\dots,\theta^{\nu_r},e_{\sigma_1},\dots,e_{\sigma_s}\right) \\ &= S\left(\theta^{\mu_1},\dots,\theta^{\mu_p},e_{\rho_1},\dots,e_{\rho_q}\right)T\left(\theta^{\nu_1},\dots,\theta^{\nu_r},e_{\sigma_1},\dots,e_{\sigma_s}\right) \\ &= S^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\rho_1\dots\rho_q}T^{\nu_1\dots\nu_r}{}_{\sigma_1\dots\sigma_s} \end{aligned} \tag{3.25}$$

克罗内克符号

$$\delta(\omega, X) = \omega(X) \Longrightarrow \delta(\theta^\mu, e_\nu) = \theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{3.26}$$

张量指标缩并

$$CT(\ldots,\ldots) = CT(\ldots\theta^\mu\ldots,\ldots e_\mu\ldots) \tag{3.27}$$

从分量的角度来看

$$CT^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} = T^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho\mu\sigma} \tag{3.28}$$

注意 $T^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho\mu\sigma} \neq T^{\alpha\beta\mu}{}_{\mu\rho\sigma}$。

对称与反对称张量，比如说

$$T^\mu_{(\nu\rho\sigma)} = \frac{1}{3!}\left(T^\mu_{\nu\rho\sigma} + T^\mu_{\rho\sigma\nu} + T^\mu_{\sigma\nu\rho} + T^\mu_{\sigma\rho\nu} + T^\mu_{\nu\sigma\rho} + T^\mu_{\rho\nu\sigma}\right) \tag{3.29}$$

$$T^\mu_{[\nu\rho\sigma]} = \frac{1}{3!}\left(T^\mu_{\nu\rho\sigma} + T^\mu_{\rho\sigma\nu} + T^\mu_{\sigma\nu\rho} - T^\mu_{\sigma\rho\nu} - T^\mu_{\nu\sigma\rho} - T^\mu_{\rho\nu\sigma}\right) \tag{3.30}$$

最后我们来看一下偏导数作用在张量上还是不是张量，

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}_\mu \widetilde{W}_\nu &= \frac{\partial x^\tau}{\partial \widetilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \widetilde{x}^\nu}W_\rho\right)\\ &= \frac{\partial x^\tau}{\partial \widetilde{x}^\mu}\left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\tau \partial \widetilde{x}^\nu}W_\rho + \frac{\partial x^\rho}{\partial \widetilde{x}^\nu}\frac{\partial W_\rho}{\partial x^\tau}\right)\\ &= \frac{\partial x^\tau}{\partial \widetilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \widetilde{x}^\nu}\partial_\tau W_\rho + \frac{\partial x^\tau}{\partial \widetilde{x}^\mu}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\tau \partial \widetilde{x}^\nu}W_\rho \end{aligned} \tag{3.31}$$

仅有第一项是满足张量变化律的[14]，也即偏导数不是张量，为此我们需要定义协变的张量导数。

3.4 度规

3.4.1 度规

什么是度规？度规是一个 $(0,2)$ 阶的对称非简并 (nondegenrate) 张量。什么是非简并？

定理 13 (nondegenrate) *在流形 M 上，度规张量是映射 $g: \chi(M) \times \chi(M) \to \mathcal{F}(M)$，如果对于任意的 $p \in M, Y_p \in T_p(M), g(X,Y)|_p = 0$，那么 $X_p = 0$。*

上述定理等价地说：对于每一个 $X_p \neq 0$，总存在 Y_p 使得 $g(X_p, Y_p) \neq 0$ 成立。度规是一个 $(0,2)$ 阶的张量，

$$\begin{aligned} g &= g(e_\mu, e_\nu)\,\theta^\mu \otimes \theta^\nu \\ &= g_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\text{coord.basis} = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.33}$$

[14] 对于 $\partial x^\rho/\partial x^\tau = \delta^\rho_\tau$ 的条件，正交归一坐标系。如考虑一个非正交变换：$x^1 = x/\sqrt{2}; x^2 = x + y$，此时，$\partial x^2/\partial x^1 = \sqrt{2} \neq 0$，系数是标度。但是第二项在洛伦兹变换下为 0。且第二项的求导不一定可以交换次序。

在闵氏时空下

$$g=-dx^0\otimes dx^0+dx^1\otimes dx^1+dx^2\otimes dx^2+dx^3\otimes dx^3=ds^2 \tag{3.34}$$

可以看出在坐标基下，度规就是线元。同理，

$$ds^2\left(X,Y\right)=g\left(X,Y\right)=g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu=\langle X,Y\rangle \tag{3.35}$$

我们固定 X_p，将 $g\left(X_p,\cdot\right)$ 看作映射：$T_p\left(M\right)\to T_p^*\left(M\right)$。那么上述定理就是在说，*CHECK* 度规有非 0 的本征值，即 $|g_{\mu\nu}|\neq 0$，所以度规可逆[15]，记 $g^{-1}=g\left(\theta^\mu,\theta^\nu\right)e_\mu\otimes e_\nu=g^{\mu\nu}e_\mu\otimes e_\nu$ 是一个 $(2,0)$ 阶张量，且满足

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\tau}=\delta^\mu_\tau \tag{3.36}$$

由惯性定理可知，

$$g_{\mu\nu}|^p_{\text{in a frame}}=\mathrm{diag}\left(-1,\ldots,-1,1,\ldots,1\right) \tag{3.37}$$

由此可以将度规分类：黎曼度规 =diag$(1,1,\ldots,1)$，洛伦兹度规[16]=diag$(-1,1,\ldots,1)$，对于洛伦兹流形

$$\langle X,X\rangle=g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu\begin{Bmatrix}<0,\text{类时}\\=0,\text{类光 (null)}\\>0,\text{类空}\end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

所以定义矢量的长度 $|X|=\sqrt{|g\left(X,X\right)|}$，在坐标基下 $X=d/d\lambda=\left(dx^\mu/d\lambda\right)\partial_\mu=X^\mu\partial_\mu$，即

$$|X|=\sqrt{\left|g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right|} \tag{3.39}$$

由 $ds^2=|X|^2\,d\lambda^2$，可得

$$l=\int_{\lambda_I}^{\lambda_F}d\lambda\sqrt{\left|g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right|} \tag{3.40}$$

当 $\lambda\sim\tau$(固有时)，相对论的粒子作用量 S 可由 (3.40) 表示。

3.4.2 局域洛伦兹参考系（局域惯性系）

我们想要通过坐标变换将度规 $g_{\mu\nu}$ 做对角化，看看可能性，

$$\widehat{g}_{\rho\sigma}\left(\widehat{x}\right)=\frac{\partial x^\mu}{\partial\widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial\widehat{x}^\sigma}g_{\mu\nu}\left(x\right) \tag{3.41}$$

将 $\widehat{g}_{\rho\sigma}\left(\widehat{x}\right)$ 和 x^μ 在流形上的点 p 做展开，且 $\widehat{x}\left(p\right)=0$；

$$\widehat{g}\left(\widehat{x}\right)\sim\left(\widehat{g}\right)_p+\left(\widehat{\partial}_\tau\widehat{g}\right)_p\widehat{x}^\tau+\left(\widehat{\partial}_\tau\widehat{\partial}_\varepsilon\widehat{g}\right)_p\widehat{x}^\tau\widehat{x}^\varepsilon+\ldots \tag{3.42}$$

将变换 (3.41) 代入，

[15] 同时说明度规代表的映射是双射 (one-to-one&onto)。

[16] 赝黎曼度规

1. $o\left(\widehat{x}^0\right)$：对于

$$\widehat{g}_{\rho\sigma}(p) \sim \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma} g_{\mu\nu}\right)_p \tag{3.43}$$

其中 $\widehat{g}_{\mu\nu}(p)$ 共有 10 个分量，而坐标变换 $\partial x^\mu/\partial\widehat{x}^\rho$ 有 16 个自由度，可以选择坐标变换使零阶项对角化。

2. $o\left(\widehat{x}^1\right)$：对于

$$\left(\widehat{\partial}_\tau \widehat{g}_{\rho\sigma}\right)_p \sim \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \widehat{x}^\tau \partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma}\widehat{\partial}_\tau g_{\mu\nu}\right)_p \tag{3.44}$$

其中 $\widehat{\partial}_\tau \widehat{g}_{\mu\nu}(p)$ 共有 40 个分量,由 1 我们确定了变换的一阶导数,而坐标变换 $\left(\partial^2 x^\mu/\partial\widehat{x}^\tau\partial\widehat{x}^\rho\right)_p$ 有 $4\times 10 = 40$ 个自由度，可以选择坐标变换使一阶项对角化。

3. $o\left(\widehat{x}^2\right)$：对于

$$\left(\widehat{\partial}_\tau \widehat{\partial}_\varepsilon \widehat{g}_{\rho\sigma}\right)_p \sim \left(\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial \widehat{x}^\tau \partial \widehat{x}^\varepsilon \partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \widehat{x}^\tau \partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \widehat{x}^\varepsilon \partial \widehat{x}^\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \widehat{x}^\tau \partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma}\widehat{\partial}_\varepsilon g_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \widehat{x}^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \widehat{x}^\sigma}\widehat{\partial}_\tau \widehat{\partial}_\varepsilon g_{\mu\nu}\right)_p \tag{3.45}$$

其中 $\widehat{\partial}_\tau \widehat{\partial}_\varepsilon \widehat{g}_{\mu\nu}(p)$ 共有 $10\times 10 = 100$ 个分量，由 1，2 我们确定了变换的一阶与二阶导数，而坐标变换 $\left(\partial^3 x^\mu/\partial\widehat{x}^\tau\partial\widehat{x}^\varepsilon\partial\widehat{x}^\rho\right)_p$ 有 $4\times(4+12+4) = 80$ 个自由度，自由度少于分量[17]，无法将二阶对角化。

根据上述讨论，与平直空间的差异发生在 $o\left(\widehat{x}^2\right)$，我们可以在一阶近似下选择合适的坐标系使得空间的度规变成洛伦兹度规，称为局域洛伦兹度规，使得

$$\widehat{g}_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}; \widehat{\partial}_\rho \widehat{g}_{\mu\nu}(p) = 0 \tag{3.46}$$

也即，足够小的弯曲时空区域看起来就像平直空间[18]。

3.4.3 升降指标

度规给出了一个自然的矢量与对偶矢量的同构映射，

$$g_{X_p} : T_p(M) \to T_p^*(M), \text{即} g_p(X_p,\cdot) : T_p(M) \to \mathbb{R} \tag{3.47}$$

对于矢量场，

$$g_X : \chi(M) \to \Sigma(M), \text{即} g(X,\cdot) : \chi(M) \to \mathcal{F}(M) \tag{3.48}$$

对于分量，

$$\begin{aligned} X_\nu &\equiv g(X, e_\nu) = g(X^\mu e_\mu, e_\nu) \\ &= X^\mu g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.49}$$

相当于 $g_{\mu\nu}$ 将指标降下来, 同理对于逆度规，

$$\begin{aligned} X^\nu &\equiv g(X, \theta^\nu) = g(X_\mu \theta^\mu, \theta^\nu) \\ &= X_\mu g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.50}$$

相当于 $g^{\mu\nu}$ 将指标升上去。

定义了度规的微分几何被称为黎曼几何。

[17]剩下的 20 个分量来自曲率/黎曼张量。

[18]but always possible construct non-coord. frame with metric $\eta_{\mu\nu}$; cf. vielbein.?

3.5 Levi-civita 张量

我们之前在平直空间中引入了 Levi-Civita 张量，

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{matrix}+1, \text{如果}\alpha\beta\gamma\delta\text{是0123的偶置换}\\ -1, \text{如果}\alpha\beta\gamma\delta\text{是0123的奇置换}\\ 0, \text{其它情况}\end{matrix} \tag{3.51}$$

但是在弯曲时空中，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 通常被称为 Levi-Civita 符号，它并不是一个微分同胚的张量。为了证明这个事实，我们引入如下的数学结论 *PROOF*，

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_n}=(-1)^s(n-j)!j!\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\ldots\delta^{\mu_j]}_{\nu_j} \tag{3.52}$$

其中 $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j\mu_{j+1}\cdots\mu_n}$ 由 $\eta^{\mu\nu}$ 升指标，s 是平直度规的标准型的负惯性指数。

特殊情况下[19]

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}=(-1)^s n! \tag{3.53}$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}=(-1)^s n!\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\ldots\delta^{\mu_n]}_{\nu_n} \tag{3.54}$$

在数值上有

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}=(-1)^s\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \tag{3.55}$$

Proof. 由矩阵行列式的定义，

$$|M|=(-1)^s\frac{1}{n!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}M^{\mu_1}_{\nu_1}M^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots M^{\mu_n}_{\nu_n} \tag{3.56}$$

两边同乘 $\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}$ 即

$$\begin{aligned}\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}|M|&=\frac{1}{n!}(-1)^s\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}M^{\nu_1}_{\mu_1}M^{\nu_2}_{\mu_2}\ldots M^{\nu_n}_{\mu_n}\\&=\delta^{\mu_1}_{\rho_1}\ldots\delta^{\mu_n}_{\rho_n}M^{\nu_1}_{[\mu_1}M^{\nu_2}_{\mu_2}\ldots M^{\nu_n}_{\mu_n]}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\\&=M^{\nu_1}_{[\rho_1}M^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n]}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\\&=\frac{1}{n!}\left(M^{\nu_1}_{\rho_1}M^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}-M^{\nu_1}_{\rho_2}M^{\nu_2}_{\rho_1}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}-\ldots\right)\\&=\frac{1}{n!}\left(M^{\nu_1}_{\rho_1}M^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}+M^{\nu_1}_{\rho_2}M^{\nu_2}_{\rho_1}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n}\epsilon_{\nu_2\nu_1\ldots\nu_n}-\ldots\right)\\&=M^{\nu_1}_{\rho_1}M^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots M^{\nu_n}_{\rho_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\end{aligned} \tag{3.57}$$

选择 $M^{\nu}_{\rho}=\partial x^{\nu}/\partial\widetilde{x}^{\rho}$，可得

$$\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}=\left|\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}\right|\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}} \tag{3.58}$$

我们可以看到 $\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$ 与张量的变换差一个雅可比行列式。对于平直空间 $\left|\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}\right|=1$，因为 $\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}$ 的定义是与坐标无关的，所以在坐标变换下 $\widetilde{\epsilon}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}=\epsilon_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}$ ■

[19] 会发现 $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$ 是与度规无关的量，而 s 是与度规相关的 (度规的标准型的负惯性指数)？

类似于 Levi-Civita 符号的这种性质被称为张量密度。我们定义权重为 ω 的张量密度定义为，

$$\widetilde{Q}^{\sigma_1\cdots}{}_{\rho_1\cdots} = \left|\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}\right|^{\omega} Q^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots \tag{3.59}$$

而 Levi-Civita 符号就是权重为 1 的张量密度。接下来我们将构造一个微分同胚不变的 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$。由式 (3.58) 可知，Levi-Civita 符号变换与张量变换仅相差一个行列式，所以我们要对 Levi-Civita 做“归一化”处理，考虑度规的行列式 $g = |g_{\mu\nu}|$，度规的变换

$$\widetilde{g}_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\widetilde{x}^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\widetilde{x}^{\sigma}}g_{\mu\nu} \tag{3.60}$$

所以

$$\begin{aligned}\widetilde{g} &= \left|\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\widetilde{x}^{\rho}}\right|\left|\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\widetilde{x}^{\sigma}}\right| g \\ &= \left|\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right|^2 g\end{aligned} \tag{3.61}$$

即

$$\frac{\sqrt{|\widetilde{g}|}}{\sqrt{|g|}} = \left|\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right| \tag{3.62}$$

代入到式 (3.58) 中去，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\epsilon}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n} &= \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{|\widetilde{g}|}}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}} \\ \sqrt{|\widetilde{g}|}\widetilde{\epsilon}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n} &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}}\end{aligned} \tag{3.63}$$

所以我们定义 Leci-Civita 张量为

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\theta^{\mu_1}\otimes\theta^{\mu_2}\cdots\otimes\theta^{\mu_n} \\ &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_n} \\ &= \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_n]}\end{aligned} \tag{3.65}$$

其中最后一步的化简可以参照 (3.57)，对于[20]

$$\begin{aligned}\epsilon^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} &= \left|\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right|\epsilon^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}}{\partial x^{\nu_n}} \\ &= \frac{\sqrt{|\widetilde{g}|}}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}}{\partial x^{\nu_n}}\end{aligned} \tag{3.66}$$

[20]注意此时的 $\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ 是用 $\eta^{\mu\nu}$ 升降指标的，所以 $\epsilon^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} = (-1)^s\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$，因为 $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$ 中一定含有 0, 所以 s 代表度规的负惯性指数，对于闵氏空间 $s=1$，对于欧氏空间 $s=0$。

即

$$\frac{1}{\sqrt{|\widetilde{g}|}}\epsilon^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial\widetilde{x}^{\rho_n}}{\partial x^{\nu_n}} \tag{3.67}$$

所以

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \tag{3.68}$$

结合式 (3.52) 我们可以得到，

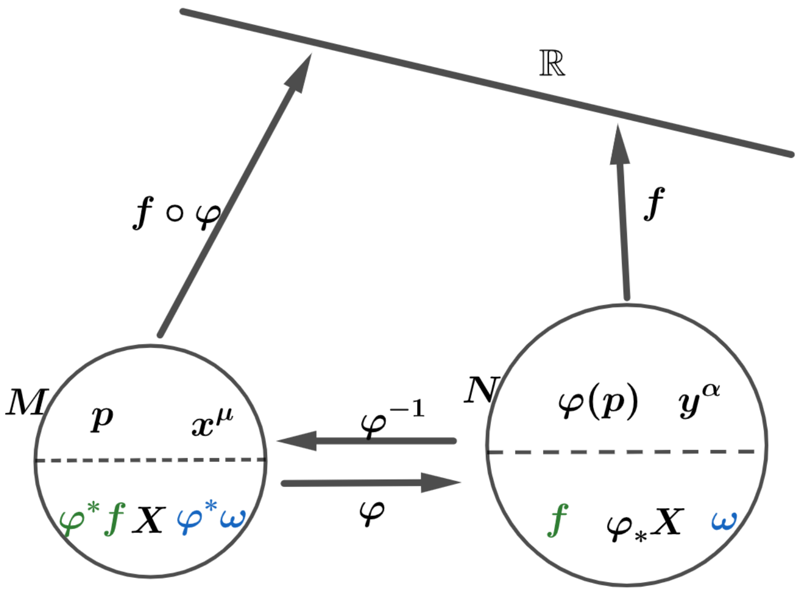
$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-p}}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-p}}=(-1)^s\,(n-p)!p!\delta^{[\alpha_1}_{\beta_1}\cdots\delta^{\alpha_{n-p}]}_{\beta_{n-p}} \tag{3.69}$$

4 李导数

在前面，我们通过矢量场 X，对函数 f 作微分 $X(f)$，而且我们知道偏导数无法保证微分同胚不变性，那么我们如何定义一个对矢量，对偶矢量或者是张量的导数？

4.1 拉回与朝前映射

我们考虑两个流形[21] M,N，



其中 x^μ,y^α 分别是流形 M,N 上的坐标卡，X 是流形 M 上的矢量场，f,ω 是流形 N 上的光滑函数和对偶矢量[22]，流形间的 C^∞ 映射 φ 的自变量是流形上的点 $p\in M$，

$$\varphi:M\to N \tag{4.1}$$

[21]流形 M,N 可以具有不同的维数。

[22]这里叫 1-形式更为合理，因为对偶空间是相对于矢量空间的，没有定义矢量空间如何定义对偶空间。注意 $\dim M\neq\dim N$。

4.1.1 拉回流形 N 上的函数 f

我们考虑一个映射：拉回映射 φ^*，将流形 N 上的函数 f 映射回流形 M 上，那么映射成 M 上的哪一个函数 $(f\circ\varphi)$ 呢？我们定义

$$\varphi^* f : M \to \mathbb{R} \tag{4.2}$$

且

$$\left(\varphi^* f\right)(p) \equiv f\left(\varphi\left(p\right)\right) \Longleftrightarrow \varphi^* f = f\circ\varphi \tag{4.3}$$

也就是说本身映射 φ 就能将流形 N 上的光滑函数映射到流形 M 上的光滑函数。在坐标系下，由于

$$y^\alpha = \varphi\left(x^\mu\right) \tag{4.4}$$

所以

$$\left(\varphi^* f\right)(x) = f\left(y\left(x\right)\right) \tag{4.5}$$

4.1.2 朝前流形 M 上的矢量 X

我们想要找到流形 N 中，矢量 X 的对应。我们定义朝前映射 $\varphi_* : V_p \to V_{\varphi(p)}$，

$$\left(\varphi_* X\right)(f) \equiv X\left(\varphi^* f\right) \tag{4.6}$$
$$= X\left(f\circ\varphi\right) \tag{4.7}$$

我们知道

$$f\left(N\right) \xrightarrow{\varphi^*} f^*\left(M\right) \xrightarrow{X} g\left(M\right) \tag{4.8}$$

那么朝前映射相当于矢量 $\varphi_* X : \mathcal{F}\left(N\right) \to \mathcal{F}\left(M\right)$。在坐标系下，由前述我们知道 $X\left(\varphi^* f\right) = X\left(f\left(y\left(x\right)\right)\right)$，所以

$$\begin{aligned} X\left(\varphi^* f\right) &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f\left(y\left(x\right)\right) \\ &= X^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} f \end{aligned} \tag{4.9}$$

同时

$$\left(\varphi_* X\right)(f) = \left(\varphi_* X\right)^\alpha \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \tag{4.10}$$

即

$$\left(\varphi_* X\right)^\alpha = X^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \tag{4.11}$$

方便起见，定义

$$\varphi^\alpha_{*\mu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \tag{4.12}$$

此时的 φ_* 可以看作在点 $p\in M$ 的对 φ 的导数，式 (4.11) 可以化为

$$\left(\varphi_* X\right)(f) = X^\mu \varphi^\alpha_{*\mu} \tag{4.13}$$

同时，我们可以将矢量推广到 $(k,0)$ 型张量，在坐标系下，

$$\begin{aligned}\varphi_*T&=T\\(\varphi_*T)^{\alpha_1\cdots\alpha_k}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}}&=T^{\mu_1\cdots\mu_k}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}}\\&=T^{\mu_1\cdots\mu_k}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}}\end{aligned}\tag{4.14}$$

所以推广的朝前映射为

$$(\varphi_*T)^{\alpha_1\cdots\alpha_k}=T^{\mu_1\cdots\mu_k}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\tag{4.15}$$

4.1.3 拉回流形 N 上的对偶矢量 ω

流形 N 上有一个对偶矢量 ω，我们对其进行拉回映射

$$(\varphi^*\omega)(X)=\omega(\varphi_*X)\tag{4.16}$$

$$=\omega_\alpha(\varphi_*X)^\alpha\tag{4.17}$$

由式 (4.11)，在坐标系中，

$$\omega(\varphi_*X)=\omega_\alpha X^\mu\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\tag{4.18}$$

同时

$$(\varphi^*\omega)(X)=(\varphi^*\omega)_\mu X^\mu\tag{4.19}$$

所以

$$(\varphi^*\omega)_\mu=\omega_\alpha\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\equiv\omega_\alpha(\varphi^*)^\alpha_\mu\tag{4.20}$$

其中 $(\varphi^*)^\alpha_\mu=\partial y^\alpha/\partial x^\mu$。我们可以将对偶矢量推广到 $(0,l)$ 型张量，在坐标系下，进行朝前映射

$$\begin{aligned}(\varphi^*\omega)(X)&=\omega(\varphi_*X)\\(\varphi^*\omega)_{\mu_1\cdots\mu_l}X^{\mu_1\cdots\mu_l}&=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\varphi_*X)^{\mu_1\cdots\mu_l}\end{aligned}\tag{4.21}$$

由 (4.15) 可知

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(\varphi_*X)^{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}X^{\nu_1\cdots\nu_l}\frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\mu_l}}{\partial x^{\nu_l}}\tag{4.22}$$

所以

$$(\varphi^*\omega)_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{\nu_1\cdots\nu_l}\frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\mu_l}}\tag{4.23}$$

4.1.4 流形 M 与流形 N 微分同胚

当流形 M 与流形 N 微分同胚时，那么映射 $\varphi:M\to N$ 可逆，$\varphi^{-1}:N\to M$。我么首先考虑对于 $(k,0)$ 阶的张量，$T\in M,\omega_i\in N$，进行朝前映射

$$(\varphi_*T)(\omega_1,\ldots,\omega_k)=T(\varphi^*\omega_1,\ldots,\varphi^*\omega_k)\tag{4.24}$$

$$(\varphi_*T)^{\mu_1\cdots\mu_k}\omega_{\mu_1}\ldots\omega_{\mu_k}=T^{\mu_1\cdots\mu_k}(\varphi^*\omega_1)_{\mu_1}\ldots(\varphi^*\omega_1)_{\mu_k}\tag{4.25}$$

其中 $(\varphi_* T)^{\mu_1\dots\mu_k} = (\varphi_* T)\left(\theta_N^{\mu_1},\dots,\theta_N^{\mu_k}\right); T^{\mu_1\dots\mu_k} = T\left(\theta_M^{\mu_1},\dots,\theta_M^{\mu_k}\right)$。对于 $(0,l)$ 阶的张量，$T\in N, X_i\in M$，进行拉回映射

$$(\varphi^* T)(X_1,\dots,X_l) = T(\varphi_* X_1,\dots,\varphi_* X_l) \tag{4.26}$$

$$(\varphi^* T)_{\nu_1\dots\nu_l} X^{\nu_1}\dots X^{\nu_l} = T_{\nu_1\dots\nu_l}(\varphi_* X_1)^{\nu_1}\dots(\varphi_* X_1)^{\nu_l} \tag{4.27}$$

其中 $(\varphi^* T)_{\nu_1\dots\nu_l} = (\varphi^* T)\left(e_{\nu_1}^M,\dots,e_{\nu_l}^M\right); T_{\nu_1\dots\nu_l} = T\left(e_{\nu_1}^N,\dots,e_{\nu_l}^N\right)$。

那么对于 (k,l) 阶的张量 $T\in M$，且 $\omega_i, X_j\in N$ 我们有

$$\begin{aligned}
&(\varphi_* T)(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k,X_1,X_2,\dots,X_l)\\
&= (\varphi_* T)^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l}\,\omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l} && (4.28)\\
&= T\left(\varphi^*\omega_1,\varphi^*\omega_2,\dots,\varphi^*\omega_k,\varphi_*^{-1}X_1,\varphi_*^{-1}X_2,\dots,\varphi_*^{-1}X_l\right) && (4.29)\\
&= T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}(\varphi^*\omega_1)_{\mu_1}(\varphi^*\omega_2)_{\mu_2}\dots(\varphi^*\omega_k)_{\mu_k}\left(\varphi_*^{-1}X_1\right)^{\nu_1}\left(\varphi_*^{-1}X_2\right)^{\nu_2}\dots\left(\varphi_*^{-1}X_l\right)^{\nu_l} && (4.30)
\end{aligned}$$

根据式 (4.11)(4.20) 可得

$$\begin{aligned}
&T\left(\varphi^*\omega_1,\varphi^*\omega_2,\dots,\varphi^*\omega_k,\varphi_*^{-1}X_1,\varphi_*^{-1}X_2,\dots,\varphi_*^{-1}X_l\right)\\
&= T\left(\omega_{\alpha_1}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}dx^{\mu_1},\dots,X^{\beta_1}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}}\partial_{\nu_1},\dots\right)\\
&= \omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\dots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}}\dots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}}T\left(dx^{\mu_1},\dots,dx^{\mu_k},\partial_{\nu_1},\dots,\partial_{\nu_l}\right) && (4.31)\\
&= T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\dots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}}\dots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} && (4.32)
\end{aligned}$$

所以

$$(\varphi_* T)^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} = T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\dots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}}\dots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} \tag{4.33}$$

我们可以将其看作坐标变换。

对于 (k,l) 阶张量 $T\in N, \omega_i, X_j\in M$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\varphi^* T)(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k,X_1,X_2,\dots,X_l)\\
&= (\varphi^* T)^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l}\,\omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l} && (4.34)\\
&= T\left(\varphi^{-1*}\omega_1,\varphi^{-1*}\omega_2,\dots,\varphi^{-1*}\omega_k,\varphi_* X_1,\varphi_* X_2,\dots,\varphi_* X_l\right) && (4.35)\\
&= T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\left(\varphi^{-1*}\omega_1\right)_{\mu_1}\left(\varphi^{-1*}\omega_2\right)_{\mu_2}\dots\left(\varphi^{-1*}\omega_k\right)_{\mu_k}(\varphi_* X_1)^{\nu_1}(\varphi_* X_2)^{\nu_2}\dots(\varphi_* X_l)^{\nu_l} && (4.36)
\end{aligned}$$

根据式 (4.11)(4.20) 可得

$$\begin{aligned}
&T\left(\varphi^{-1*}\omega_1,\varphi^{-1*}\omega_2,\dots,\varphi^{-1*}\omega_k,\varphi_* X_1,\varphi_* X_2,\dots,\varphi_* X_l\right)\\
&= T\left(\omega_{\alpha_1}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}}dx^{\mu_1},\dots,X^{\beta_1}\frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\partial_{\nu_1},\dots\right)\\
&= \omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}}\dots\frac{\partial x^{\alpha_k}}{\partial y^{\mu_k}}\frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\dots\frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}}T\left(dx^{\mu_1},\dots,dx^{\mu_k},\partial_{\nu_1},\dots,\partial_{\nu_l}\right) && (4.37)\\
&= T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\omega_{\alpha_1}\dots\omega_{\alpha_k}X^{\beta_1}\dots X^{\beta_l}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}}\dots\frac{\partial x^{\alpha_k}}{\partial y^{\mu_k}}\frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\dots\frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}} && (4.38)
\end{aligned}$$

所以

$$(\varphi^* T)^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_k}}{\partial y^{\mu_k}} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}} \tag{4.39}$$

我们换个角度来看两个流形的微分同胚

下面举个例子:

例 14 假设流形 $M = S^2$，且 $r = 1$，局域坐标系为 $x^\mu = (\theta, \phi)$，流形 $N = \mathbb{R}^3$，局域坐标系为 $y^\alpha = (x, y, z)$，流形的映射为 $\varphi : M \to N$，$\varphi^\alpha = (x, y, z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

对于流形 N 上的度规张量 $g_{\alpha\beta} = diag(1,1,1)$，在流形 M 上的拉回映射为

$$\begin{aligned}
(\varphi_* g)_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \\
&= diag\left(1, \sin^2\theta\right)
\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}
& ds^2|_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
\xrightarrow{\textit{pull-back}}\ & ds^2|_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \textit{(诱导度规/嵌入)}
\end{aligned}$$

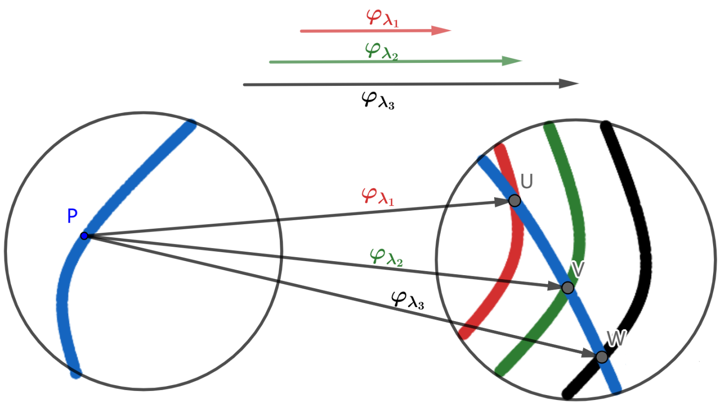
4.2 李导数

我们之前定义的矢量都是根据流形上点 p 来定义的，由于流形（弯曲流形上）上矢量的移动与平直空间的移动不同，不同点的矢量（切空间）之间不能比较。但是我们为了能够对流形上的张量场进行微分运算，我们想要通过拉回与朝前映射比较不同点上的张量场。

首先我们考虑一个单参数 λ 的微分同胚映射，且流形 $N = M$

$$\varphi_\lambda : M \to M \tag{4.40}$$

其中 $\varphi_{\lambda=0}$ 代表恒等映射，选择一点 p，φ_λ 将会在 M 上产生一个曲线，称为轨道。由前面积分曲线 (2.2.2) 可知，轨道可以看作矢量场 $X = d/d\lambda$ 的积分曲线 $X^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$。如图所示



其中右蓝线 UVW 代表点 p 的轨道 $x_p^\mu(\lambda)$，右边红，绿，黑分别代表映射 $\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}, \varphi_{\lambda_3}$ 对左蓝线的整体映射。

我们可以比较点 p 处的张量场 T_p 来定义李导数

$$(\mathcal{L}_X T)_p \equiv \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\varphi_\lambda^* T)_p - T_p}{\lambda} \tag{4.41}$$

其 $\varphi_\lambda^* T$ 是 pull-backs，X_p 指代 p 点积分曲线上的切矢量，同时我们也可以用 push-forward 来定义：$(\varphi_{-\lambda})_* T$，即[23]

$$(\mathcal{L}_X T)_p \equiv \lim_{\lambda \to 0} \frac{((\varphi_{-\lambda})_* T)_p - T_p}{\lambda} \tag{4.42}$$

对于流形上的每一点，给出一个张量场 $\mathcal{L}_X T$

$$\mathcal{L}_X T \equiv \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_\lambda^* T - T}{\lambda} \tag{4.43}$$

可以看出李导数 $\mathcal{L}_X$ 将一个 (k,l) 张量 T 映射为另外一个 (k,l) 张量 $\mathcal{L}_X T$，且满足

1. 线性：$\mathcal{L}_X(aT + bS) = a\mathcal{L}_X T + b\mathcal{L}_X S$
2. 莱布尼兹率：$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$

4.2.1 函数

对于函数 f，由式 (4.5)，我们可以求得它的李导数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X f &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_\lambda^* f(x) - f(x)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\varphi_\lambda(x)) - f(x)}{\lambda}\end{aligned} \tag{4.44}$$

[23] 为什么变化量不是 $-\lambda$?

其中 x 与 $\varphi_\lambda(x) = x^\mu(\lambda)$ 代表不同的点，变量为 λ，即不同的映射，所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X f &= \frac{df(x^\mu(\lambda))}{d\lambda} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \\ &= X^\mu \partial_\mu f = X(f)\end{aligned} \tag{4.45}$$

4.2.2 矢量

对于矢量 Y，李导数定义为

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\varphi_{-\lambda})_* Y - Y}{\lambda} \tag{4.46}$$

先求解 $\mathcal{L}_X$ 对基矢 ∂_μ 的作用，由式 (4.11) 可知

$$\mathcal{L}_X \partial_\mu = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\varphi_{-\lambda})_* \partial_\mu - \partial_\mu}{\lambda} \tag{4.47}$$

其中

$$\begin{aligned}(\varphi_{-\lambda})_* \partial_\mu &= ((\varphi_{-\lambda})_* \partial_\mu)^\alpha \partial_\alpha \\ &= (\partial_\mu)^\nu \frac{\partial y^\alpha(-\lambda)}{\partial x^\nu}\partial_\alpha = \delta_\mu^\nu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu}\partial_\alpha \\ &= \frac{\partial y^\alpha(-\lambda)}{\partial x^\mu}\partial_\alpha\end{aligned} \tag{4.48}$$

对 $y^\alpha(-\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 附近展开，

$$\begin{aligned}y^\alpha(-\lambda) &= y^\alpha(0) + \frac{\partial y^\alpha}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}(-\lambda) + \dots \\ &= x^\alpha - \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\lambda + \dots \\ &= x^\alpha - X^\alpha \lambda + \dots\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial y^\alpha(-\lambda)}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \lambda \partial_\mu X^\alpha + \dots \tag{4.49}$$

式 (4.47) 可以化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \partial_\mu &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(\delta_\mu^\alpha - \lambda\partial_\mu X^\alpha + \dots\right)\partial_\alpha - \partial_\mu}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial_\mu - \lambda\partial_\mu X^\alpha \partial_\alpha + \dots - \partial_\mu}{\lambda} \\ &= -\partial_\mu X^\alpha \partial_\alpha\end{aligned} \tag{4.50}$$

由于 $Y = Y^\mu \partial_\mu$，将 Y^μ 看作函数，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \mathcal{L}_X(Y^\mu \partial_\mu) \\ &= (\mathcal{L}_X Y^\mu)\partial_\mu + Y^\mu \mathcal{L}_X \partial_\mu \\ &= (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu)\partial_\mu \\ &= [X, Y]\end{aligned} \tag{4.51}$$

那么由李括号的性质 $[X,Y]=-[Y,X]$ 可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= [X,Y] = -[Y,X] \\ &= -\mathcal{L}_Y X\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\mathcal{L}_X X = 0 \tag{4.53}$$

同时我们记

$$(\mathcal{L}_X Y)^\mu = ([X,Y])^\mu \sim \mathcal{L}_X Y^\mu = [X,Y]^\mu \tag{4.54}$$

4.2.3 对偶矢量

对于对偶矢量 ω，李导数定义为

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi_\lambda^* \omega - \omega}{\lambda} \tag{4.55}$$

同样的，我们求解 $\mathcal{L}_X$ 对基矢 dx^μ 的作用，由式 (4.20) 可得

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^* dx^\mu &= (\varphi_\lambda^* dx^\mu)_\alpha \, dx^\alpha \\ &= (dx^\mu)_\nu \frac{\partial y^\nu(\lambda)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\ &= \frac{\partial y^\mu(\lambda)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\ &= (\delta_\alpha^\mu + \lambda \partial_\alpha X^\mu + \dots) \, dx^\alpha \\ &= dx^\mu + \lambda \partial_\alpha X^\mu dx^\alpha + \dots\end{aligned} \tag{4.56}$$

代入到式 (4.55) 中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X dx^\mu &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{dx^\mu + \lambda \partial_\alpha X^\mu dx^\alpha + \dots - dx^\mu}{\lambda} \\ &= \partial_\nu X^\mu dx^\nu\end{aligned} \tag{4.57}$$

由于 $\omega = \omega_\mu dx^\mu$，将 ω_μ 看作函数，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \omega &= \mathcal{L}_X (\omega_\mu dx^\mu) \\ &= (\mathcal{L}_X \omega_\mu) \, dx^\mu + \omega_\mu \mathcal{L}_X dx^\mu \\ &= (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu) \, dx^\mu\end{aligned} \tag{4.58}$$

所以

$$(\mathcal{L}_X \omega)_\mu = X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu \tag{4.59}$$

另外一方面，我们也可以计算

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X (\omega_\mu Y^\mu) &= (\mathcal{L}_X \omega_\mu) \, Y^\mu + \omega_\mu \mathcal{L}_X Y^\mu \\ &= Y^\mu X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\mu X^\nu \partial_\nu Y^\mu\end{aligned} \tag{4.60}$$

同时 $\omega_\mu Y^\mu = \omega(Y) = C(\omega\otimes Y)$，缩并是指标的变换与李导数可交换，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega_\mu Y^\mu) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y) \qquad (4.61)\\ &= (\mathcal{L}_X\omega)_\mu Y^\mu + \omega_\mu(\mathcal{L}_X Y)^\mu\\ &= (\mathcal{L}_X\omega)_\mu Y^\mu + \omega_\mu(X^\nu\partial_\nu Y^\mu - Y^\nu\partial_\nu X^\mu) \qquad (4.62)\end{aligned}$$

与式 (4.60) 比较，

$$Y^\mu X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu Y^\mu\partial_\mu X^\nu = (\mathcal{L}_X\omega)_\mu Y^\mu \tag{4.63}$$

所以

$$(\mathcal{L}_X\omega)_\mu = X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu X^\nu \tag{4.64}$$

4.2.4 张量

考虑 (k,l) 阶的张量 T，其李导数定义为

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\varphi_\lambda^* T - T}{\lambda} \tag{4.65}$$

且 $T = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}$，所以

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_X\left(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}\right)\\ &=\left(\mathcal{L}_X T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\right)\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}+\\ &T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\mathcal{L}_X\left(\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}\right)\\ &=\left(\mathcal{L}_X T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\right)\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}+\\ &T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(\mathcal{L}_X\partial_{\mu_1})\otimes\partial_{\mu_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}+\\ &T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes\mathcal{L}_X\left(\partial_{\mu_2}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_l}\right)\\ &=\ldots\end{aligned}\tag{4.66}$$

由式 (4.47)(4.55) 可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = {}& X^\nu\partial_\nu T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\\ &- T^{\mu\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_\mu X^{\mu_1} - T^{\mu_1\mu\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_\mu X^{\mu_2} - \cdots - T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_\mu X^{\mu_k}\\ &+ T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu\ldots\nu_l}\partial_{\nu_1}X^\nu + T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu\ldots\nu_l}\partial_{\nu_2}X^\nu + \cdots + T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu}\partial_{\nu_l}X^\nu\end{aligned}\tag{4.67}$$

特别的，我们选取 $X = \partial_\alpha, X^\nu = \delta^\nu_\alpha$，可得

$$(\mathcal{L}_{\partial_\alpha}T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = \delta^\nu_\alpha\partial_\nu T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = \partial_\alpha T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \tag{4.68}$$

此时的李导数转化为偏导数，也就是说我们总是可以找到一个矢量使得其沿坐标基矢的方向将李导数化为偏导数。

5 微分形式

我们想跳过度规引入微分。

5.1 p-形式

p-形式是一个 $(0,p)$ 阶的全反对称张量场，

$$\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = \omega_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p]} \tag{5.1}$$

且流形 M 上 p-形式的集合记为 $\Lambda^p(M)$，独立的自由度[24]为 C_n^p。对于一个 n 维的流形，最高为 n-形式，称为 top-形式，指标最多有 n 个，当多于 n 时，由于全反对称，变为为 0。比如，0-形式是函数；1-形式是对偶矢量 ω_μ；2-形式是 $\omega_{[\mu\nu]}$；3-形式是 $\omega_{[\mu\nu\lambda]}$，……

5.2 楔积 (Wedge Product)

我们有一个 p-形式 ω 以及一个 q-形式 η，定义两个形式的楔积

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q} &= \frac{(p+q)!}{p!q!}\omega_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q]} &(5.2)\\ &= C_{p+q}^p\omega_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q]} &(5.3)\end{aligned}$$

其中 $C_{p+q}^p = C_{p+q}^q$ 为排列数。比如

$$(A\wedge B)_{\mu\nu} = A_{[\mu}B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu \tag{5.4}$$

同时我们有如下的结论：

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}(\eta\wedge\omega) \tag{5.5}$$

Proof. 我们来看右边[a]

$$\begin{aligned}(\eta\wedge\omega)_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} &= C_{p+q}^q\eta_{[\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p]}\\ &= C_{p+q}^q\delta_{\nu_1}^{[\alpha_1}\delta_{\nu_2}^{\alpha_2}\ldots\delta_{\nu_q}^{\alpha_q}\delta_{\mu_1}^{\beta_1}\delta_{\mu_2}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_p]}\eta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\omega_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\\ &= C_{p+q}^q\delta_{\nu_1}^{[\alpha_1}\delta_{\nu_2}^{\alpha_2}\ldots\delta_{\nu_q}^{\alpha_q}\delta_{\mu_1}^{\beta_1}\delta_{\mu_2}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_p]}\omega_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\eta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\\ &= ((-1)^q)^p\,C_{p+q}^q\delta_{\nu_1}^{[\beta_1}\delta_{\nu_2}^{\beta_2}\ldots\delta_{\nu_p}^{\beta_p}\delta_{\mu_1}^{\alpha_1}\delta_{\mu_2}^{\alpha_2}\ldots\delta_{\mu_q}^{\alpha_q]}\omega_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\eta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\\ &= (-1)^{pq}\,C_{p+q}^q\omega_{[\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}\eta_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q]}\\ &= (-1)^{pq}(\omega\wedge\eta)_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p\mu_1\mu_2\ldots\mu_q} &(5.6)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\omega\wedge\eta &= (\omega\wedge\eta)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\,dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}\\ &= (-1)^{pq}(\eta\wedge\omega)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}\,dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q} &(5.7)\\ &= (-1)^{pq}(\eta\wedge\omega) &(5.8)\end{aligned}$$

[24] $\{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\}$ 的独立组合数

或者可以这样看，

$$
\begin{aligned}
\omega\wedge\eta &= (\omega\wedge\eta)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\, dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}\\
&= (\omega\wedge\eta)_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q]}\, dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}\\
&= (\omega\wedge\eta)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\, dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q]}\\
&= (\omega\wedge\eta)_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\, dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q]}\\
&= C^p_{p+q}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q} dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q]}\\
&= (-1)^{pq}\, C^p_{p+q}\eta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} dx^{[\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}\otimes dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p]}\\
&= (-1)^{pq}\,(\eta\wedge\omega)
\end{aligned}
$$

■

[a] 一个重要的点：$\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\delta^{\mu_2]}_{\nu_2} = -\delta^{[\mu_2}_{\nu_1}\delta^{\mu_1]}_{\nu_2}$，而非 $\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\delta^{\mu_2]}_{\nu_2} = -\delta^{[\mu_2}_{\nu_2}\delta^{\mu_1]}_{\nu_1}$

所以当 ω 是奇数形式时，

$$\omega\wedge\omega = -(\omega\wedge\omega) = 0 \tag{5.9}$$

同时楔积满足结合律

$$\omega\wedge(\eta\wedge\xi) = (\omega\wedge\eta)\wedge\xi \tag{5.10}$$

注意到 $A_{[[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p]\nu_1\nu_2\ldots\nu_q]} = A_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\nu_1\nu_2\ldots\nu_q]}$。

接下来，我们来看看在具体坐标基下的表示。先来看一个简单的例子，两个 1-形式作楔积，

$$
\begin{aligned}
(dx^\mu\wedge dx^\nu)_{\alpha\beta} &= 2\,(dx^\mu)_{[\alpha}\,(dx^\nu)_{\beta]}\\
&= (dx^\mu)_\alpha\,(dx^\nu)_\beta - (dx^\mu)_\beta\,(dx^\nu)_\alpha\\
&= \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

那么得到的 2-形式为

$$dx^\mu\wedge dx^\nu = \left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right) dx^\alpha\otimes dx^\beta \tag{5.12}$$

$$
\begin{aligned}
&= dx^\mu\otimes dx^\nu - dx^\nu\otimes dx^\mu\\
&= 2!dx^{[\mu}\otimes dx^{\nu]}
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

我们可以得到这样的一个普遍结论

$$dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} = p!dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p]} \tag{5.14}$$

Proof. 从定义出发

$$
\begin{aligned}
(dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p})_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p} &= \frac{p!}{(p-1)!}\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\left(dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)_{\nu_2\nu_3\ldots\nu_p]}\\
&= p\,(p-1)\,\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\left(dx^{\mu_3}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)_{\nu_3\ldots\nu_p]}\\
&= \ldots\\
&= p!\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\delta^{\mu_p}_{\nu_p]}
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} &= p!\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\dots\delta^{\mu_p}_{\nu_p]}dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_p}\\
&= p!\delta^{\mu_1}_{\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\dots\delta^{\mu_p}_{\nu_p}dx^{[\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_p]}\\
&= p!dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p]} \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

■

结合式 (5.1) 可以将 p-形式写为

$$
\begin{aligned}
\omega &= \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\\
&= \omega_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_p]}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p}\\
&= \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_p]}\\
&= \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

对于非坐标基[25]

$$
\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p} \qquad (5.18)
$$

例 15

$$
\begin{aligned}
A\wedge B\wedge C &= (A_{\mu_1}dx^{\mu_1})\wedge(B_{\mu_2}dx^{\mu_2})\wedge(C_{\mu_3}dx^{\mu_3})\\
&= A_{\mu_1}B_{\mu_2}C_{\mu_3}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge dx^{\mu_3}\\
&= 3!A_{\mu_1}B_{\mu_2}C_{\mu_3}dx^{[\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3]}\\
&= A_{\mu_1}B_{\mu_2}C_{\mu_3}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3} + A_{\mu_3}B_{\mu_1}C_{\mu_2}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3}\\
&+ A_{\mu_2}B_{\mu_3}C_{\mu_1}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3} - A_{\mu_2}B_{\mu_1}C_{\mu_3}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3}\\
&- A_{\mu_3}B_{\mu_2}C_{\mu_1}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3} - A_{\mu_1}B_{\mu_3}C_{\mu_2}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes dx^{\mu_3}\\
&= A\otimes B\otimes C + B\otimes C\otimes A + C\otimes A\otimes B\\
&- B\otimes A\otimes C - C\otimes B\otimes A - A\otimes C\otimes B \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

同时可以看出

$$
\begin{aligned}
dx^0\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1} &= \qquad (5.20)\\
&= \frac{1}{n!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\cdots\wedge dx^{\mu_n}\\
&= \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\dots\delta^{\mu_p}_{\nu_p]}dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_p}\\
&= (-1)^s\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\frac{\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}}{n!}dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_p}\\
&= \epsilon_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}dx^{\nu_1}\otimes dx^{\nu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_p}
\end{aligned}
$$

[25] 关键是 $(\theta^\mu)_\alpha = \delta^\mu_\alpha$

也就是说 $dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$ 的分量为[26]$\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$。结合式 (5.17)，并参照博客，对于 n 维的流形，一个 n-形式 ω 可以化为

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{n!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} \\
&= \frac{1}{n!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} n! \delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\delta^{\mu_n}_{\nu_n]} dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_n} \\
&= (-1)^s \omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \frac{\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}{n!} dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_n} \\
&= \frac{(-1)^s}{n!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\
&= \omega_{01\ldots(n-1)} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

且由式 (5.20)n-形式的基可以化为

$$\begin{aligned}
dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \cdots \wedge dx^{\mu_n} &= n! \delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\delta^{\mu_n}_{\nu_n]} dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_n} \\
&= n! (-1)^s \frac{\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}{n!} dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_n} \\
&= (-1)^s \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_n} \\
&= (-1)^s \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

不考虑指标，仅在数值上正确，我们有

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \cdots \wedge dx^{\mu_n} = \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \tag{5.23}$$

即有

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = (-1)^s \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \tag{5.24}$$

5.3 外导数

形式是更为基本与原始地能够用来积分与微分而不需要额外的结构。

我们定义外导数

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M) \tag{5.25}$$

在坐标基下，

$$(d\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} = (p+1)\,\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\ldots\mu_p]} \tag{5.26}$$

可以看出 $d\omega$ 是一个 p+1-形式，所以

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{1}{(p+1)!}(d\omega)_{\nu\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= \frac{1}{p!}\partial_{[\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p]} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= \frac{1}{p!}\partial_{\nu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

对于函数 f

$$df = \partial_\mu f dx^\mu \tag{5.28}$$

[26]是张量吗？

是一个全微分。对于任意的形式 ω，由式 (5.26)

$$
\begin{aligned}
(d\,(d\omega))_{\alpha\beta\mu_1\ldots\mu_p} &= (p+2)\,\partial_{[\alpha}\,(d\omega)_{\beta\mu_1\ldots\mu_p]} \\
&= (p+2)\,(p+1)\,\partial_{[\alpha}\partial_\beta\omega_{\mu_1\ldots\mu_p]}
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

因为 $\partial_\alpha\partial_\beta$ 是对称的，当 ω 任意时，可得

$$
d^2\omega = d\,(d\omega) = 0 \Longrightarrow d^2 = 0 \tag{5.30}
$$

对于一个 p-形式 ω，当 $d\omega = 0$ 时，称 ω 是**闭的 (closed)**；当流形上存在 (p-1)-形式 η，使得 $\omega = d\eta$ 时，称 ω 是**恰当的 (exact)**。根据 (5.30)，当 ω 是恰当的，那么 ω 是闭的；但是它的逆命题不一定成立。对于平直的流形 $\mathbb{R}^n$ 上面闭的 p-形式 ω，同时也是恰当的。当一个流形局域上平坦时，那么其上的闭的 p-形式至少是恰当的。外导数满足修改后的莱布尼兹法则：p-形式的 ω，q-形式的 η，

$$
d\,(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^p\,\omega\wedge d\eta \tag{5.31}
$$

Proof. 对于等式 (5.31) 左边，取其分量：

$$
\begin{aligned}
(d\,(\omega\wedge\eta))_{\tau\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q} &= (p+q+1)\,\partial_{[\tau}\,(\omega\wedge\eta)_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q]} \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\partial_{[\tau}\left(\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\ldots\nu_q]}\right) \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\delta_\tau^{[\beta_1}\delta_{\mu_1}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_{p+1}}\delta_{\nu_1}^{\beta_{p+2}}\ldots\delta_{\nu_q}^{\beta_{p+q+1}]}\partial_\tau\left(\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\ldots\nu_q}\right) \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\delta_\tau^{[\beta_1}\delta_{\mu_1}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_{p+1}}\delta_{\nu_1}^{\beta_{p+2}}\ldots\delta_{\nu_q}^{\beta_{p+q+1}]}\left(\partial_\tau\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\ldots\nu_q} + \omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\partial_\tau\eta_{\nu_1\ldots\nu_q}\right) \\
&= \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\delta_\tau^{[\beta_1}\delta_{\mu_1}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_{p+1}}\delta_{\nu_1}^{\beta_{p+2}}\ldots\delta_{\nu_q}^{\beta_{p+q+1}]}\partial_\tau\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\eta_{\nu_1\ldots\nu_q} \\
&+ \frac{(p+q+1)!}{p!q!}\delta_\tau^{[\beta_1}\delta_{\mu_1}^{\beta_2}\ldots\delta_{\mu_p}^{\beta_{p+1}}\delta_{\nu_1}^{\beta_{p+2}}\ldots\delta_{\nu_q}^{\beta_{p+q+1}]}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\partial_\tau\eta_{\nu_1\ldots\nu_q} \\
&= d\omega\wedge\eta + (-1)^p\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\delta_\tau^{[\beta_2}\delta_{\mu_1}^{\beta_3}\ldots\delta_{\mu_{p-1}}^{\beta_{p+1}}\delta_{\mu_p}^{\beta_1}\delta_{\nu_1}^{\beta_{p+2}}\ldots\delta_{\nu_q}^{\beta_{p+q+1}]}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\partial_\tau\eta_{\nu_1\ldots\nu_q} \\
&= d\omega\wedge\eta + (-1)^p\,\omega\wedge d\eta
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

■

特殊情况下，对于 $p=0$，即 0-形式的 f, 有

$$
d\,(f\eta) = df\wedge\eta + f\wedge d\eta \tag{5.33}
$$

当我们将 $\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 看作函数时，可以将外导数写为[27]，

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)\\
&= \frac{1}{p!}\left(d\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\right)dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}+\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}d\left(dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right) \qquad (5.34)\\
&= \frac{1}{p!}\partial_\mu\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu}\wedge dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

但是这种方法依赖于 dx^μ 的基矢的选取，那么对于一般的基矢，

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\right)\\
&= \frac{1}{p!}\partial_\mu\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\theta^{\mu}\wedge\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}+\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}d\left(\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\right) \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

其中对于< 没证完 >

$$\begin{aligned}
d\left(\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\right) &= d\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}-\theta^{\mu_1}\wedge d\left(\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\right)\\
&= d\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}-\theta^{\mu_1}\wedge d\theta^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\\
&+\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge d\theta^{\mu_3}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}-\theta^{\mu_1}\wedge\theta^{\mu_2}\wedge d\theta^{\mu_3}\wedge d\left(\theta^{\mu_4}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_p}\right)\\
&+
\end{aligned}$$

$\partial_{[\rho}\omega_{\rho_1\ldots\rho_p]}$ 符合张量变换律

$$\begin{aligned}
\partial'_{[\mu}\omega'_{\mu_1\ldots\mu_p]} &= \frac{\partial\omega'_{\mu_1\ldots\mu_p}}{\partial x'^\mu} = \partial'_{[\mu}x^\nu\partial_{|\nu|}\omega'_{\mu_1\ldots\mu_p]}\\
&= \partial'_{[\mu}x^\nu\partial_{|\nu|}\left(\left(\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}\right)\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}\right)\\
&= \partial'_{[\mu}x^\nu\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}\partial_\nu\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}+\partial'_{[\mu}x^\nu\partial_{|\nu|}\left(\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}\right)\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}\\
&= \partial'_{[\mu}x^\nu\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}\partial_\nu\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}\\
&= \partial'_{\mu}x^{[\nu}\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p}x^{\nu_p]}\partial_\nu\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}\\
&= \partial'_{\mu}x^{\nu}\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p}x^{\nu_p}\partial_{[\nu}\omega_{\nu_1\ldots\nu_p]} \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

其中第三行 $\partial'_{[\mu}x^\nu\partial_{|\nu|}\left(\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}\right)=\partial'_{[\mu}x^\nu\partial_{|\nu|}\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}+\partial'_{[\mu}x^\nu\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\partial_{|\nu|}\partial'_{\mu_2}x^{\nu_2}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}+\cdots=\partial'_{[\mu}\partial'_{\mu_1}x^{\nu_1}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}+\partial'_{[\mu_1}x^{\nu_1}\partial'_{\mu}x^{\nu}\partial_{|\nu|}\partial'_{\mu_2}x^{\nu_2}\ldots\partial'_{\mu_p]}x^{\nu_p}+\cdots=0$。可以看出 $\partial_{[\nu}\omega_{\nu_1\ldots\nu_p]}$ 符合张量变化率。

对于上面的微分形式，我们并不需要在流形上定义度规。但是当我们有一个度规，我们可以做更多的事情。

[27]两个 d 是一回事吗？

5.4 霍奇对偶 (Hodge Duality)

当 ω 是一个 n 维流形上的 p-形式，我们定义霍奇对偶 $*:\Lambda^p(M)\to\Lambda^{n-p}(M)$，

$$(*\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{n-p}}=\frac{1}{p!}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_{n-p}}\omega_{\nu_1\ldots\nu_p} \tag{5.38}$$

同时

$$\begin{aligned}
(**\omega)_{\mu_1\ldots\mu_p}&=\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_{n-p}}{}_{\mu_1\ldots\mu_p}(*\omega)_{\nu_1\ldots\nu_{n-p}} &(5.39)\\
&=\frac{1}{p!(n-p)!}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_{n-p}}{}_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n-p}}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=\frac{1}{p!(n-p)!}g^{\nu_1\tau_1}\ldots g^{\nu_{n-p}\tau_{n-p}}\varepsilon_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n-p}}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=\frac{1}{p!(n-p)!}\varepsilon_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=\frac{1}{p!(n-p)!}\varepsilon_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=\frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_p\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=\frac{(-1)^{p(n-p)+s}}{p!(n-p)!}p!(n-p)!\delta^{[\alpha_1}_{\mu_1}\ldots\delta^{\alpha_p]}_{\mu_p}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\\
&=(-1)^{p(n-p)+s}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} &(5.40)
\end{aligned}$$

也即

$$(**\omega)_{\mu_1\ldots\mu_p}=(-1)^{p(n-p)+s}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} \tag{5.41}$$

可以得到

$$(-1)^{s+p(n-p)}**\omega=\omega \tag{5.42}$$

上式中的 $(-1)^{s+p(n-p)}**$ 被称为恒等算子。同样的，$*$ 作用在坐标基矢上，

$$*\left(dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)=\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\ldots\mu_n}dx^{\mu_{p+1}}\wedge dx^{\mu_{p+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n} \tag{5.43}$$

Proof. 我们知道 $\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\ldots\mu_n}$ 保留了 ϵ 的反对称性，

$$\begin{aligned}
*\left(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)&=\frac{1}{p!}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\left(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\right)_{\nu_1\ldots\nu_p}dx^{\tau_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\tau_{n-p}}\\
&=\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\delta^{\mu_p}_{\nu_p]}dx^{\tau_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\tau_{n-p}}\\
&=\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}}dx^{[\tau_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\tau_{n-p}]}\\
&=\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}}\frac{dx^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\tau_{n-p}}}{(n-p)!}\\
&=\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}}dx^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\tau_{n-p}} &(5.44)
\end{aligned}$$

特别地，根据式 (3.55)，

$$*\left(dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\right)=\varepsilon^{01\dots(n-1)}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{01\dots(n-1)}=\frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \tag{5.45}$$

当 $p=0$ 时，由式 (5.22) 可得，

$$\begin{aligned}*1&=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}\\&=\frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_n}(-1)^s\,\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}dx^0\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\\&=\sqrt{|g|}dx^0\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\end{aligned} \tag{5.46}$$

■

对于 p-形式的 ω,η，我们有一个 n-形式，

$$\omega\wedge(*\eta)=\eta\wedge(*\omega) \tag{5.47}$$

Proof. 左边

$$\begin{aligned}(\omega\wedge(*\eta))_{\mu_1\dots\mu_n}&=\frac{(p+n-p)!}{p!\,(n-p)!}\omega_{[\mu_1\dots\mu_p}(*\eta)_{\mu_{p+1}\dots\mu_n]}\\&=\frac{n!}{(p!)^2\,(n-p)!}\omega_{[\mu_1\dots\mu_p}\varepsilon^{\nu_1\dots\nu_p}{}_{\mu_{p+1}\dots\mu_n]}\eta_{\nu_1\dots\nu_p}\end{aligned} \tag{5.48}$$

右边< 没证完 >

$$\begin{aligned}(\eta\wedge(*\omega))_{\mu_1\dots\mu_n}&=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\eta_{[\mu_1\dots\mu_p}(*\omega)_{\mu_{p+1}\dots\mu_n]}\\&=\frac{n!}{(p!)^2\,(n-p)!}\eta_{[\mu_1\dots\mu_p}\varepsilon^{\nu_1\dots\nu_p}{}_{\mu_{p+1}\dots\mu_n]}\omega_{\nu_1\dots\nu_p}\end{aligned} \tag{5.49}$$

■

在 3 维空间中，如果 A,B 是对偶矢量，且 $g_{\mu\nu}$ =diag$(1,1,1)$ 那么

$$\begin{aligned}(*(A\wedge B))_i&=\frac{1}{2!}\varepsilon^{jk}{}_i(A\wedge B)_{jk}\\&=\frac{1}{2!}\varepsilon^{jk}{}_i\frac{2!}{1!1!}A_{[j}B_{k]}\\&=\varepsilon^{[jk]}{}_iA_jB_k\\|g|=1&\Longrightarrow\epsilon_{jki}A_jB_k=\epsilon_{ijk}A_jB_k\end{aligned} \tag{5.50}$$

可以看出，在 3 维空间中，$*(A\wedge B)$ 可以看作对偶矢量的叉积。

5.5 霍奇-拉普拉斯算子

我们定义霍奇-拉普拉斯算子，

$$\Delta=dd^\dagger+d^\dagger d \tag{5.51}$$

其中 $d^\dagger=(-1)^{s+np+n-1}*d*$，而对于 n 维空间 $d^\dagger f=(-1)^{s+np+n-1}*d*f=0$，其中 $*f$ 是 n-形式，所以 $d*f=0$。那么

$$
\begin{aligned}
(-1)^{s+np+n-1}\Delta f &= (-1)^{s+np+n-1}\left(dd^\dagger+d^\dagger d\right)f \\
&= (-1)^{s+np+n-1}\,d^\dagger df = (-1)^{s+np+n-1}\,d^\dagger df \\
&= *d*df = \frac{1}{n!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\left(d*df\right)_{\mu_1\cdots\mu_n} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\partial_{[\mu_1}\left(*df\right)_{\mu_2\cdots\mu_n]} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\partial_{[\mu_1}\left(\varepsilon^{\nu}{}_{\mu_2\cdots\mu_n]}\left(df\right)_\nu\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\partial_{[\mu_1}\left(\varepsilon^{\nu}{}_{\mu_2\cdots\mu_n]}\partial_\nu f\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\partial_{[\mu_1}\left(\varepsilon_{|\tau|\mu_2\cdots\mu_n]}g^{\nu\tau}\partial_\nu f\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\partial_{\mu_1}\left(\epsilon_{\tau\mu_2\cdots\mu_n}\sqrt{|g|}g^{\nu\tau}\partial_\nu f\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}\epsilon_{\tau\mu_2\cdots\mu_n}\partial_{\mu_1}\left(\sqrt{|g|}g^{\nu\tau}\partial_\nu f\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{(n-1)!}\left(-1\right)^s(n-1)!\delta^{\mu_1}_\tau\partial_{\mu_1}\left(\sqrt{|g|}g^{\nu\tau}\partial_\nu f\right) \\
&= \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}}\partial_\tau\left(\sqrt{|g|}g^{\tau\nu}\partial_\nu f\right)
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

所以 Δ 作用于 f 相当于达朗贝尔算子 $\square=\nabla_\mu\nabla^\mu$ 作用在函数 f 上。我们之后将会在微分几何中学习霍奇理论及其与 de Rham 宇宙的联系。

例 16 (平坦时空中的电磁场) *在平直时空中，度规为 $\eta_{\mu\nu}$。电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 为 2-形式，由麦克斯韦方程*

$$\nabla\times\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{B}=\mathbf{0} \tag{5.53}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\mathbf{0} \tag{5.54}$$

可得

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]}=(dF)_{\mu\nu\lambda}=0\Longrightarrow dF=0 \tag{5.55}$$

由前述我们知道，闵氏时空是平直的，当一个形式是闭的，就意味它是恰当的，即存在 1-形式 $A=A_\mu dx^\mu$ 使得 $F=dA$，可以看出 A 是矢势。由 $d^2A=0\Longrightarrow$ 规范变换：$A\to A+d\lambda$，此时 $F\to F+d(d\lambda)=F$，其中 λ 是一个 0-形式。

对于麦克斯韦方程

$$\nabla\times\mathbf{B}-\partial_t\mathbf{E}=\mathbf{J} \tag{5.56}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho \tag{5.57}$$

可得

$$\partial_\mu F^{\nu\mu}=J^\nu\Longrightarrow d(*F)=*J \tag{5.58}$$

Proof. 我们已知麦克斯韦方程 $\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$，由前述可知 $(-1)^{s+p(n-p)} **$ 是恒等算子，即 $(-1)^{s+p(n-p)} **J = J$

$$
\begin{aligned}
(d(*F))_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= 3\partial_{[\mu_1}(*F)_{\mu_2\mu_3]} \\
&= \frac{3}{2}\partial_{[\mu_1}\left(\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\mu_2\mu_3]}F_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
(*d*F)_\tau &= \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}{}_\tau (d*F)_{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}{}_\tau \partial_{\mu_1}\left(\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\mu_2\mu_3}F_{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}{}_\tau \partial_{\mu_1}\left(\varepsilon_{\mu\nu\mu_2\mu_3}F^{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{4}g_{\tau\alpha}\epsilon_{\mu\nu\mu_2\mu_3}\epsilon^{\mu_1\alpha\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}F^{\mu\nu} \\
&= -g_{\tau\nu}\partial_\mu F^{\mu\nu} = g_{\tau\nu}\partial_\mu F^{\nu\mu} \\
&= g_{\tau\nu}J^\nu = J_\tau
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

即

$$
*d*F = **J \Longrightarrow d*F = *J \tag{5.61}
$$

■

当 $J = 0$ 时，有

$$
dF = 0 \tag{5.62}
$$

$$
d(*F) = 0 \tag{5.63}
$$

也就意味着我们可以做变换

$$
F' = *F \tag{5.64}
$$

$$
(*F)' = **F = -F \tag{5.65}
$$

得到对偶的电磁场。真空中的电磁场是对偶不变的。

下面再看一个有关辛流形的例子：

例 17 (辛流形) 哈密顿力学就是相空间的几何学。哈密顿力学由一个偶数维流形（相空间）、其上的一个辛构造（庞加莱积分不变式）和其上的一个函数（哈密顿函数）给出。我们引入一个闭[28]的非退化的 *2*-形式 $\omega_{\mu\nu}$，具有闭的非退化的 *2*-形式的流形称为辛流形。如果存在 X^μ 和函数 H，使得[29] $X^\mu\omega_{\mu\nu} = -\partial_\nu H$ 成立，我们试图求解这个方程，设 $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}, \omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$，可以得到

$$
\begin{aligned}
X^\mu &= -\partial_\nu H\omega^{\nu\mu} \\
&= \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H
\end{aligned} \tag{5.66}
$$

[28] ω 满足 $d\omega = 0$

[29] 这个要求是啥？

那么 X^μ 所产生的积分曲线

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}=X^\mu=\omega^{\mu\nu}\partial_\nu H \tag{5.67}$$

我们选取参数 $\lambda=t$，可得

$$\frac{dx^\mu}{dt}=\omega^{\mu\nu}\partial_\nu H \tag{5.68}$$

此式，可以看作正则方程的普遍形式。我们定义泊松括号，

$$\{f,g\}=\omega^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu g \tag{5.69}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{dx^\mu}{dt}\partial_\mu f\\&=\omega^{\mu\nu}\partial_\nu H\partial_\mu f\\&=\{f,H\}\end{aligned} \tag{5.70}$$

另外一方面

$$\frac{df}{dt}=\frac{dx^\mu}{dt}\partial_\mu f=X^\mu\partial_\mu f=\mathcal{L}_X f \tag{5.71}$$

关键是什么？关键是矢量 $\omega^{\mu\nu}\partial_\nu H$ 的时间 t 的参数化，才可以导致这样的结构

$$\mathcal{L}_X f=\{f,H\} \tag{5.72}$$

我们选择 $x^\mu=\left(q^i,p_j\right)$ 以及

$$\omega^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \tag{5.73}$$

可以得到正则方程

$$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{5.74}$$

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{5.75}$$

6 积分

有些积分是在子流形上进行的。

6.1 子流形

6.1.1 子流形

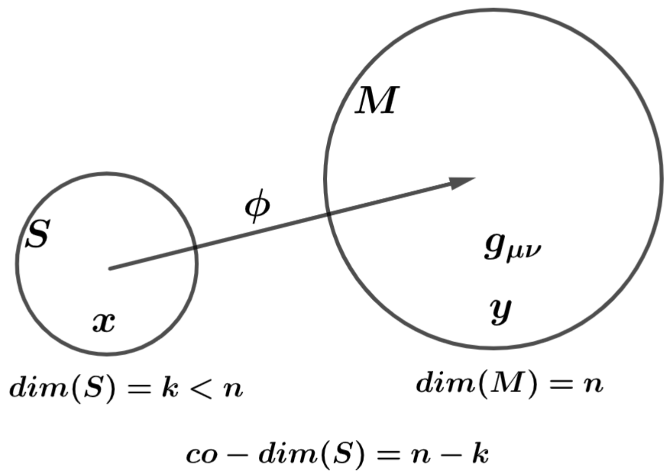
我们定义一个子流形：当一个 $k\,(k<n)$ 维的流形 S 是 n 维流形 M 的子流形时，满足

1. 映射 $\phi:S\to M$ 是 C^∞（无穷光滑）且一对一的；[30]

[30]我们不想让流形 S 在 M 中自交。

2. 映射 $\phi_*: T_p(S) \to T_{\phi(p)}(M)$ 是一对一的。

那么映射 ϕ 被称为嵌入（将子流形 S 嵌入到流形 M 中去）;$\phi[S]$ 被称为嵌入式子流形；余维数为 $n-k$。如图所示，



由此，M 上度规 $g_{\mu\nu}$ 的诱导度规为

$$\gamma_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \tag{6.1}$$

另外一方面，我们可以通过约束空间维数来定义子流形，比如加入约束 $\phi^{(a)}(x) = c^a, a = 1, 2, \ldots, n-k$ 来定义子流形。

接下来我们来看一个特殊的子流形：余维数为 1 的子流形，超曲面。

6.1.2 超曲面

一个余维数为 1 的曲面，我们称其为超曲面 Σ。当 $V \in \Sigma$ 时，

$$f(x) = c \Longrightarrow V^\mu \partial_\mu f|_\Sigma = V^\mu \partial_\mu c = 0 \tag{6.2}$$

接下来我们定义：法向 1-形式[31]：$df = \partial_\nu f dx^\nu : df(V) = V^\mu \partial_\mu f|_\Sigma = 0$，$V$ 是超曲面 Σ 上的一个矢量。法向矢量[32]：$\zeta^\mu = \partial^\mu f = g^{\mu\nu}\partial_\nu f$，

$$\zeta^\mu\text{是类时的（类空的）} \Longrightarrow \Sigma\text{是类时的（类空的）}$$
$$\zeta^\mu\text{是 null} \Longrightarrow \Sigma\text{是 null}$$

一个 null 的法向矢量也与 Σ 相切：$\zeta^\mu\zeta_\mu = 0$，与法矢垂直。

法矢的归一化：

$$n^\mu = \pm\frac{\zeta^\mu}{\sqrt{|\zeta^\mu\zeta_\mu|}}, n^\mu n_\mu = \pm 1 \tag{6.3}$$

[31]如何在流形上构造形式？应该不止一种构造方法。

[32]由矢量的内积：$\zeta \cdot V = g_{\mu\nu}\zeta^\mu V^\nu = g_{\mu\nu}\partial^\mu f V^\nu = V^\nu \partial_\nu f = 0$

6.1.3 带边界的流形

定义几乎与流形的定义相同，但是不同的是，映射 $\phi : \mathcal{O} \to U$，其中 U 是开集 $R^{n+} = \left\{\left(x^0, \ldots, x^{n-1}\right) | x^{n-1} \geq 0\right\}$ 的子集。当 $x^{n-1} = 0$ 时是边界，记为 ∂M。

6.2 斯托克斯定理

我们拥有了带有坐标的流形，所以我们可以作积分

$$\int F(x)\, d^n x \tag{6.4}$$

在坐标变换下

$$d^n x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^n x \tag{6.5}$$

如果我们知道 $F(x)$ 是什么，我们就能求出积分。**对于流形上的微分，我们可以通过一般张量的李导数或者 p-形式的外导数来实现。**

6.2.1 体形式

在 n 维流形中定义体形式，

$$v = v(x)\, dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}, v(x) \neq 0 \tag{6.6}$$

体形式的可定向性：如果流形上处处有 $v(x) > 0\,(v(x) < 0)$，那么称体形式是右手（左手）。

由式 (3.57)，可得坐标变换

$$\begin{aligned} dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{n-1} &= \frac{1}{n!} \epsilon'_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} dx'^{\mu_1} \wedge dx'^{\mu_2} \cdots \wedge dx'^{\mu_n} \\ &= \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n} \\ &= \frac{1}{n!} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n} \\ &= \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \end{aligned} \tag{6.7}$$

流形的可定向性是对于整个流形都是成立的，当我们进行坐标变换时，不能改变体形式的可定向性，即 $|\partial x' / \partial x| > 0$，如果无法满足，我们称不可定向的流形，比如莫比乌斯带。我们主要关注可定向性的流形。

对于一个坐标卡 $\phi : \mathcal{O} \to U$，我们定义

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} f v &\equiv \int_U f(x)\, v(x)\, dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \\ &= \int_U d^n x f(x)\, v(x) \end{aligned} \tag{6.8}$$

其中我们记 $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \to d^n x$，且 top-形式的自由度为 1，由式 (6.7) 可知 $d^n x$ 不是张量而是张量密度。根据坐标变换，如果 v 是一个体形式，那么当 $f(x) > 0$ 时，$f(x)\, v$ 也是一个体形式。

一个自然的体元是 Levi-Civita 张量，由式 (5.16) 可知

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} dx^{[\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_n]} \\
&= \frac{1}{n!}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} \\
&= \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} \\
&= \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \qquad (6.9) \\
&= \sqrt{|g'|} dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{n-1} = *1 \qquad (6.10) \\
&= \sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{|g'|} d^n x'
\end{aligned}
$$

我们在一个 n 维流形上对一个标量函数 $f(x)$ 进行积分，可得

$$
\begin{aligned}
I &= \int f(x)\,\varepsilon \\
&= \int f(x)\sqrt{|g|} d^n x \qquad (6.11) \\
&= \int f\left(x\left(x'\right)\right)\sqrt{|g'|}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| d^n x' \\
&= \int f\left(x'\right)\sqrt{|g'|} d^n x' \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

推广这个积分，在 n 维流形 M 上，其 k 维的子流形 Σ，对一个 k-形式 $\omega \in M$ 积分，

$$
\int_{\phi(\Sigma)} \omega \equiv \int_{\Sigma} \phi^* \omega \qquad (6.13)
$$

6.2.2 斯托克斯定理

对于 (n-1)-形式 ω，我们有斯托克斯定理：

$$
\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad (6.14)
$$

我们看不同维数下对应什么，

Case 18 $n=1$，*$\omega(x)$ 是 0-形式，*

$$
\int_M d\omega = \int_a^b \frac{d\omega}{dx} dx, \int_{\partial M} \omega = \omega(b) - \omega(a) \qquad (6.15)
$$

这是微积分基本定理。

Case 19 $n=2$，*ω 是 1-形式，*

$$
\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 \qquad (6.16)
$$

可得

$$
\begin{aligned}
d\omega &= 2!\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2]} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \\
&= \partial_\nu \omega_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = \partial_1\omega_2 dx^1 \wedge dx^2 + \partial_2\omega_1 dx^2 \wedge dx^1 \\
&= \left(\partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1\right) dx^1 \wedge dx^2 \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

所以

$$\int_M d\omega = \int_M (\partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1)\, dx^1 dx^2 \tag{6.18}$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 \tag{6.19}$$

这是格林定理。

Case 20 $n = 3$，ω 是 *2*-形式，

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= \frac{1}{2!}\omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3\end{aligned} \tag{6.20}$$

可得

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{1}{2!}\partial_\nu \omega_{\mu_1\mu_2} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \\ &= \partial_3\omega_{12} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \partial_2\omega_{31} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \partial_1\omega_{23} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned} \tag{6.21}$$

所以

$$\int_M d\omega = \int_M (\partial_1\omega_{23} + \partial_2\omega_{31} + \partial_3\omega_{12})\, dx^1 dx^2 dx^3 = \int \partial_i\omega_i d^3x \tag{6.22}$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\partial M} \omega_i dS^i \tag{6.23}$$

这是高斯定理。